Модель слинки

Задача 1. [МОШ 2021/22, 10 класс, задача 1] Несколько $(2N+1)$ одинаковых маленьких шариков соединены одинаковыми невесомыми пружинками в цепочку (см. рисунок, $N=3$). Пусть длина одной пружинки в недеформированном состоянии равна нулю, диаметр шарика пренебрежимо мал, а $N \gg 1$, тогда такая модельная конфигурация неплохо описывает некоторые свойства успокаивающей игрушки-пружины «слинки».



Известно, что если цепочка шариков с пружинками ($N \gg 1$) располагается на гладкой горизонтальной поверхности, один из крайних шариков удерживается, а на другой крайний шарик действует горизонтальная сила, равная силе тяжести цепочки, то длина цепочки оказывается равна L_0. Здесь и далее речь идёт о статическом состоянии цепочки, при котором все шарики цепочки не движутся.

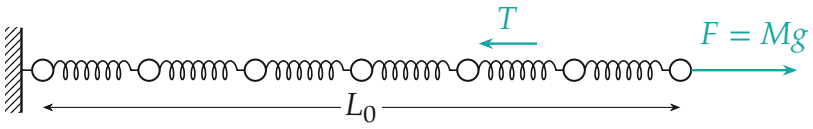
A. (4 балла) Чему будет равна длина цепочки, если её подвесить к потолку за один из концов?

B. (6 баллов) На каком расстоянии от потолка будет располагаться нижняя точка цепочки, если оба её конца закрепить на потолке на расстоянии D друг от друга? Какую форму примет цепочка? Назовите вид кривой.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Цепочка неподвижна, поэтому каждый шарик в равновесии: сумма сил на него равна нулю. Пружинка нулевой длины — особая: её длина целиком равна растяжению, $\ell = T/k$, а вектор пружинки направлен вдоль силы натяжения. Значит, по силам сразу читается геометрия: где натяжение больше, там пружинка длиннее. Задача относится к классу «статика цепочки: натяжение в каждом звене из равновесия куска ниже/за ним».

Обозначения. m — масса шарика, $M = (2N+1)m$ — масса цепочки, k — жёсткость пружинки, T — модуль силы натяжения пружинки, $\ell = T/k$ — её длина.

1. Калибровка: горизонтальная цепочка. Пружинки невесомы, на гладкой поверхности вдоль цепочки на шарики ничего, кроме пружинок, не действует. Второй закон Ньютона для куска цепочки от тянущего конца до любой пружинки (в проекции на ось цепочки): натяжение этой пружинки равно приложенной силе, $T = Mg$ — одинаково во всех $2N$ пружинках.



Горизонтальная цепочка: в каждой пружинке натяжение $T = Mg$

Длина каждой пружинки Mg/k, всего их $2N$:

$$L_0 = 2N \cdot \frac{(2N+1)mg}{k} \approx \frac{4N^2 mg}{k} \qquad (N \gg 1).$$

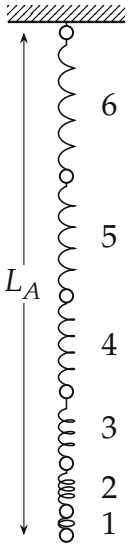
Это и есть связь неизвестной жёсткости с данной длиной L_0: дальше всё выражаем через L_0.

Часть А.

2. Натяжение в вертикальной цепочке. Пронумеруем пружинки снизу: $n = 1, \dots, 2N$. Под пружинкой номер n висят n шариков. Условие равновесия этого висящего куска (второй закон Ньютона в проекции на вертикаль): натяжение пружинки держит их вес,

$$T_n = nmg, \qquad \ell_n = \frac{T_n}{k} = \frac{nmg}{k}.$$

Длины пружинок растут снизу вверх как $1, 2, 3, \dots$ — это видно на рисунке ($N = 3$, масштаб соблюдён).



Подвешенная цепочка: n-я снизу пружинка (номер справа) в n раз длиннее нижней

3. Длина. Сумма арифметической прогрессии:

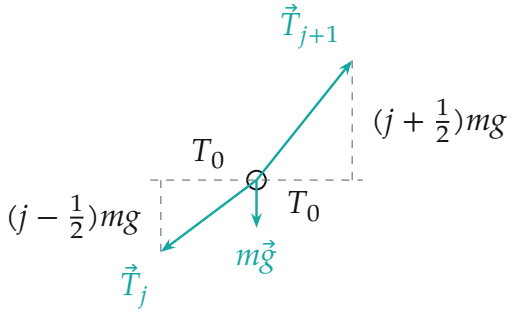
$$L_A = \sum_{n=1}^{2N} \frac{nmg}{k} = \frac{mg}{k} \cdot \frac{2N(2N+1)}{2} = \frac{L_0}{2}.$$

Здесь равенство точное при любом N.

Второй способ: натяжение растёт по длине цепочки линейно от 0 внизу до Mg вверху, его среднее значение $Mg/2$ — вдвое меньше, чем у горизонтальной цепочки, где везде Mg. Длина пропорциональна натяжению, поэтому $L_A = L_0/2$.

Часть В.

4. Горизонтальные проекции натяжений одинаковы. Пронумеруем шарики от нижнего (средний, номер 0) вправо: $j = 1, \ldots, N$; крайний шарик $j = N$ закреплён. Пружинку между шариками $j-1$ и j назовём j-й. По симметрии левая половина — зеркальная копия правой. На шарик j действуют сила тяжести и натяжения двух пружинок $\vec{T}_j$ и $\vec{T}_{j+1}$, каждая направлена вдоль своей пружинки.



Силы на шарик j правой половины (длины стрелок в масштабе, $T_0 = 2mg$, $j = 2$)

Второй закон Ньютона для шарика j в проекции на горизонталь: сила тяжести проекции не даёт, значит горизонтальные проекции натяжений соседних пружинок равны. По цепочке — у всех пружинок одна и та же горизонтальная проекция T_0. Пружинка нулевой длины — вектор $\vec{\ell}_j = \vec{T}_j/k$, поэтому все пружинки имеют одну и ту же горизонтальную проекцию длины T_0/k: шарики стоят по горизонтали через равные промежутки

$$\Delta x = \frac{D}{2N}.$$

5. Вертикальные проекции. Средний шарик по симметрии тянут вверх две одинаковые пружинки, каждая держит половину его веса: $T_{1y} = \frac{1}{2}mg$. Второй закон Ньютона для шарика j в проекции на вертикаль: $T_{j+1,y} - T_{jy} - mg = 0$, то есть каждая следующая пружинка держит на mg больше:

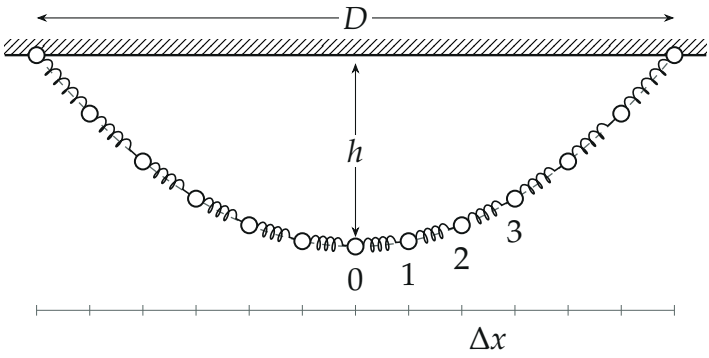
$$T_{jy} = \Big(j - \frac{1}{2}\Big)mg, \qquad \Delta y_j = \frac{T_{jy}}{k} = \Big(j - \frac{1}{2}\Big)\frac{mg}{k}.$$

Вертикальные проекции пружинок образуют арифметическую прогрессию.

6. Форма. Высота шарика j над нижним

$$y_j = \sum_{i=1}^{j}\Big(i - \frac{1}{2}\Big)\frac{mg}{k} = \frac{j^2}{2}\cdot\frac{mg}{k}, \qquad x_j = j\,\frac{D}{2N} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{mg}{2k}\Big(\frac{2N}{D}\Big)^2 x^2.$$

Все шарики лежат точно на параболе.



Цепочка с закреплёнными концами ($N = 6$, координаты вычислены): шарики через равные Δx на параболе (пунктир)

7. Глубина. Крайний шарик $j = N$ — на потолке, поэтому

$$h = y_N = \frac{N^2 mg}{2k} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4N^2 mg}{k} = \frac{L_0}{8}.$$

Обратите внимание: глубина не зависит от D. Чем шире концы, тем сильнее растянута цепочка вдоль, но вертикальные проекции натяжений задаёт только вес, а они и определяют глубину. Для обычной цепи (нерастяжимой) это не так — там получается цепная линия, а не парабола.

Проверка. Размерность: mg/k — метры. Предел $D \to 0$: две половины висят вертикально, в каждой по N пружинок, и по пункту А для половины длина $\sum (j - \frac{1}{2}) \frac{mg}{k} = \frac{N^2 mg}{2k} = \frac{L_0}{8}$ — то же, что при любом D. Численное решение уравнений равновесия для $N = 20$ (python) дало глубину $200\, mg/k = N^2 mg/(2k)$ и строго одинаковые Δx.

Смысл: невесомые пружинки нулевой длины ведут себя как «нить, длина каждого кусочка которой пропорциональна натяжению», а для такой нити горизонтальные проекции кусков одинаковы — отсюда парабола, как у троса висячего моста.

Ответ. А) $L_A = \dfrac{L_0}{2}$; В) нижняя точка на расстоянии $\dfrac{L_0}{8}$ от потолка при любом D; цепочка принимает форму параболы.