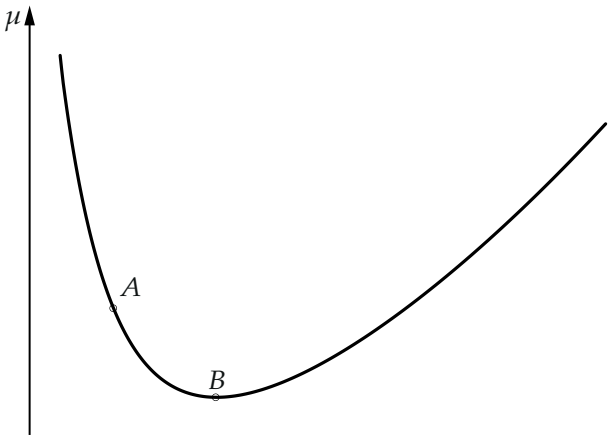
КПД автомобиля

Задача 2. [МОШ 2021/22, 10 класс, задача 2] На рисунке, приведённом ниже (увеличенный вариант на дополнительном листе), вы видите фрагмент модельной зависимости расхода топлива μ (измеряемого в единицах объёма на единицу пройденного пути) некоторого особого автомобиля с двигателем внутреннего сгорания от квадрата его скорости. Расположение оси абсцисс (по которой откладывается величина v^2) неизвестно. Известно только, что она перпендикулярна оси ординат и направлена вправо по рисунку. Масштаб по оси ординат неизвестен, известно только её расположение.



КПД автомобиля, движущегося с некоторой постоянной скоростью, соответствующей т. A на графике, равен 6 %, а КПД автомобиля, движущегося с другой скоростью, соответствующей точке B, равен 18 %. Определите максимально возможный КПД автомобиля в диапазоне скоростей, для которых построен график.

Можно считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля и направлена против скорости, трение качения пренебрежимо мало, колёса автомобиля по дороге не проскальзывают. Коэффициентом полезного действия в этой задаче мы называем долю энергии сгоревшего топлива (в процентах), которая расходуется

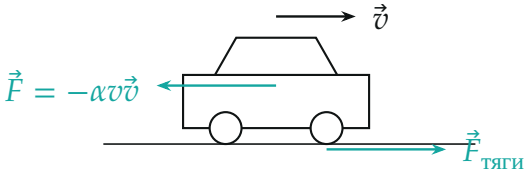
на поддержание постоянной скорости автомобиля при движении по горизонтальной дороге.

▲ **Решение. Что происходит.** КПД — отношение двух энергий на одном и том же пути: работы против сопротивления воздуха и теплоты сгоревшего топлива. Первая пропорциональна v^2, вторая — μ, поэтому $\eta \propto v^2/\mu$. На графике это наклон луча, проведённого в точку графика из начала координат. Беда в том, что начала координат мы не видим: неизвестно, где на рисунке $\mu = 0$. Два известных КПД дают два уравнения — из них находим и положение оси абсцисс, и коэффициент. Задача относится к классу «графическая: величина — наклон луча из начала координат, максимум — касательная».

Обозначения. $F = \alpha v^2$ — сила сопротивления воздуха; q — теплота сгорания единицы объёма топлива; s — пройденный путь; x — расстояние точки графика от оси ординат на рисунке, y — её высота над нижним краем рисунка (в пунктах, 1 pt $\approx$ 0,35 мм); y_0 — высота на рисунке, где $\mu = 0$ (неизвестна).

1. Формула КПД. При постоянной скорости по горизонтальной дороге второй закон Ньютона для автомобиля в проекции на направление движения: сила тяги (сила трения покоя от дороги на ведущие колёса) равна силе сопротивления. Колёса не проскальзывают, трение качения мало, поэтому работа двигателя на пути s вся идёт на сопротивление воздуха: $A = Fs = \alpha v^2 s$. Топлива сгорает объём μs, его теплота $q\mu s$:

$$\eta = \frac{\alpha v^2 s}{q\mu s} = \frac{\alpha}{q} \cdot \frac{v^2}{\mu}.$$



Равномерное движение: сила тяги (трение покоя на ведущем колесе) уравновешивает сопротивление воздуха

2. Переход к рисунку. Ось ординат на рисунке стоит там, где $v^2 = 0$, значит $v^2 = ax$ с неизвестным масштабом a. По вертикали μ пропорционален расстоянию до неизвестной оси абсцисс: $\mu = b(y - y_0)$, масштаб b тоже неизвестен. Подставляем:

$$\eta = C\frac{x}{y - y_0}, \qquad C = \frac{\alpha a}{qb}.$$

Неизвестных два: C и y_0. Точка $O'(0;\ y_0)$ — настоящее начало координат графика. Величина $(y - y_0)/x$ — наклон луча $O'M$ в точку графика M, и $\eta = C/$наклон: *линии постоянного КПД — лучи из O'*, чем положе луч, тем больше КПД.

3. Ищем y_0 и C. Координаты точек сняты с рисунка условия: $A(31{,}5;\ 52{,}3)$, $B(70{,}0;\ 18{,}8)$ (в pt; B — самая низкая точка графика). Записываем формулу для обеих точек:

$$y_A - y_0 = \frac{Cx_A}{6}, \qquad y_B - y_0 = \frac{Cx_B}{18}.$$

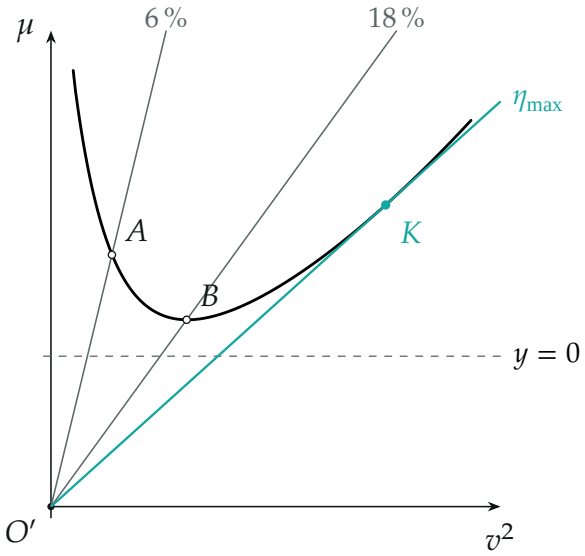
Вычитаем, чтобы исключить y_0:

$$C = \frac{y_A - y_B}{\frac{x_A}{6} - \frac{x_B}{18}} = \frac{33{,}5}{5{,}24 - 3{,}89} \approx 24{,}8, \qquad y_0 = y_A - \frac{Cx_A}{6} \approx -77{,}6\ \text{pt}.$$

Ось абсцисс лежит на 78 pt ниже нижнего края рисунка — далеко под графиком. Знак разумный: $\mu > 0$ на всём графике.

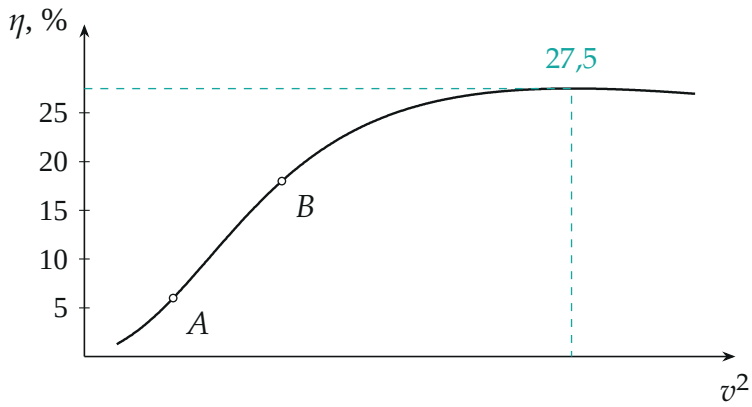
4. Максимум — касательная. КПД наибольший у самого пологого луча из O', ещё задевающего график: это касательная из O' к графику. Точка касания K: $x_K \approx 173$ pt, $y_K \approx 78$ pt (численно: максимум $x/(y - y_0)$ по точкам кривой рисунка, python):

$$\eta_{\max} = C\frac{x_K}{y_K - y_0} = 24{,}8 \cdot \frac{173}{78 + 77{,}6} \approx 27{,}5\,\%.$$



Построение (масштаб 0,75): лучи постоянного КПД из настоящего начала координат O'; касательная даёт η_{max}; штриховая линия — нижний край рисунка условия

5. Проверка по всему графику. КПД в каждой точке кривой по той же формуле (по вычисленным точкам): рост от 1 % на левом краю, 6 % в A, 18 % в B, плоский максимум 27,5 % в точке K и лёгкий спад к правому краю (27,0 %).



КПД вдоль графика (по горизонтали — v^2 в масштабе рисунка условия)

Обратите внимание: y_0 находится как разность двух близких чисел ($5{,}24 - 3{,}89$), поэтому ответ очень чувствителен к положению точки A: сдвиг A по горизонтали на 1 pt (треть миллиметра) меняет $\eta_{\max}$ на 1,5 %. Точки A и B сняты с векторного рисунка PDF организаторов (лежат на кривой с точностью 0,1 pt), поэтому 27,5 % — точное значение для этого рисунка. При ручном снятии точек с распечатки (точность $\pm 0{,}5$ мм $\approx \pm 1{,}4$ pt по каждой координате A и B) получается $\eta_{\max}$ от 26 до 31 %; диапазон организаторов $(25{,}0 \pm 1{,}2)$ % задевает его нижний край — их ответ соответствует точке A, снятой примерно на 1 мм правее.

Проверка. Размерность: αv^2 — ньютоны, $q\mu$ — Дж/м = Н, η безразмерен. Значения в A и B воспроизводятся (график КПД проходит через 6 и 18 %). Максимум КПД правее минимума расхода B: при большей скорости топлива на километр уходит чуть больше, а полезная работа растёт как v^2 быстрее.

Смысл: самый экономичный по топливу режим (точка B) — не самый эффективный; двигатель работает лучше всего при заметно большей скорости.

Ответ. $\eta_{\max} \approx 27{,}5$ % по точному рисунку условия; с учётом точности снятия точек с распечатки — 26–31 %. У организаторов $(25{,}0 \pm 1{,}2)$ % — край того же диапазона (точка A снята на ≈ 1 мм правее).