Модель миража

Задача 3. [МОШ 2021/22, 10 класс, задача 3] Нижний мираж — это оптическое явление в атмосфере, при котором мнимое изображение неба и облаков наблюдается ниже поверхности земли, как бы отражаясь от расположенного на горизонтальной поверхности зеркала. Например, в солнечный день нагретая поверхность горизонтальной асфальтовой дороги на некотором расстоянии от наблюдателя может казаться покрытой лужами (в которых отражается небо и окружающий пейзаж), тогда как на самом деле дорога сухая. Это явление объясняется искривлением световых лучей в неравномерно нагретом воздухе вблизи дороги. В этой задаче можно считать, что вблизи поверхности асфальта лучи распространяются по дугам парабол, как показано на рисунке ниже.



Предполагая, что отклонение показателя преломления воздуха n от единицы на высоте h над дорогой пропорционально концентрации воздуха $N(h)$ на этой высоте: $n(h) - 1 \propto N(h)$, определите, на каком расстоянии от себя наблюдатель видит область «мокрого» асфальта.

В этой задаче предлагается считать, что температура воздуха уменьшается линейно с высотой от 50 °C у поверхности дороги до 20 °C на высоте 2 м. Глаза наблюдателя находятся на высоте 1,7 м. При температуре 20 °C показатель преломления воздуха отличается от единицы на величину $\Delta n = 4 \cdot 10^{-4}$.

▲ **Решение. Что происходит.** Свет от неба идёт вниз, в горячем приземном слое воздух реже, показатель преломления меньше, и луч постепенно загибается вверх — в глаз наблюдателя он приходит снизу, под малым углом α к горизонту. Мозг продолжает луч прямой линией и «видит» небо там, где эта прямая упирается в асфальт: там и кажется лужа. Значит, нужно найти угол α у глаз. Ключевой закон — закон преломления для слоистой среды: вдоль луча сохраняется $n \cos \alpha$. Класс задачи: луч в среде с плавно меняющимся показателем преломления.

Обозначения. y — высота над дорогой; $H = 1{,}7$ м — высота глаз; $T(y)$ — абсолютная температура; $n_0 = n(0)$, $n_H = n(H)$; α — угол луча с горизонтом у глаз; L — расстояние до «мокрого» асфальта; $T_* = 293$ K, $\Delta n = 4 \cdot 10^{-4}$ — данные для 20 °C.

1. Показатель преломления на высоте y. По условию $n - 1 \propto N$. Давление воздуха у дороги на высотах порядка метров одно и то же, поэтому из уравнения состояния $p = NkT$ концентрация $N = \dfrac{p}{kT} \propto \dfrac{1}{T}$. Привязываем коэффициент к данным при T_*:

$$n(y) - 1 = \Delta n \, \frac{T_*}{T(y)}.$$

Температура линейна: от $T_0 = 323$ K у дороги до $T_* = 293$ K на высоте 2 м, то есть падает на 15 K на метр:

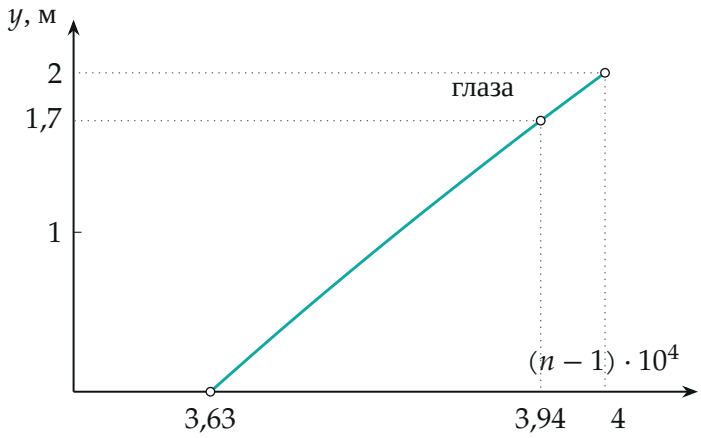
$$T(y) = T_0 - 15\,\frac{\text{K}}{\text{м}} \cdot y, \qquad T(H) = 323 - 15 \cdot 1{,}7 = 297{,}5 \text{ K}.$$

Отсюда

$$n_0 - 1 = 4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{293}{323} = 3{,}63 \cdot 10^{-4},$$

$$n_H - 1 = 4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{293}{297{,}5} = 3{,}94 \cdot 10^{-4}.$$

Чем выше, тем холоднее и плотнее воздух и тем больше n.

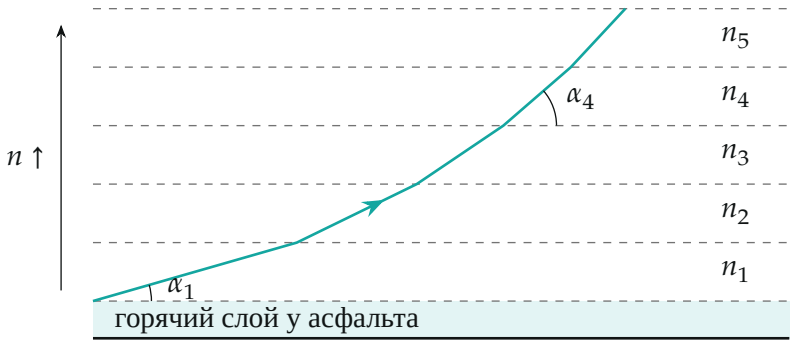


Отклонение показателя преломления от единицы в зависимости от высоты (точки вычислены)

2. Закон преломления для слоистой среды. Мысленно разрежем воздух на тонкие горизонтальные слои, в каждом n постоянен. На границе двух слоёв закон Снеллиуса $n_1 \sin\beta_1 = n_2 \sin\beta_2$ записан для углов с нормалью, то есть с вертикалью; угол с горизонтом $\alpha = 90° - \beta$, поэтому $n_1 \cos\alpha_1 = n_2 \cos\alpha_2$. Переходя от слоя к слою, получаем, что вдоль всего луча

$$n(y)\cos\alpha(y) = \text{const}.$$

Мы выбрали угол с горизонтом, потому что границы слоёв горизонтальны и в самой низкой точке луча этот угол равен нулю.



Луч в слоистом воздухе: снизу вверх n растёт, произведение $n\cos\alpha$ одно и то же, поэтому луч становится круче (углы преувеличены)

3. Угол прихода луча в глаз. Луч, создающий «лужу», в самой низкой точке (у самого асфальта) идёт горизонтально: $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$. Запишем сохранение $n\cos\alpha$ между этой точкой и глазом:

$$n_0 \cdot 1 = n_H \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos\alpha = 1 - \frac{n_0}{n_H} = \frac{n_H - n_0}{n_H} \approx n_H - n_0.$$

Угол мал, поэтому $1 - \cos\alpha \approx \dfrac{\alpha^2}{2}$:

$$\alpha \approx \sqrt{2(n_H - n_0)} = \sqrt{2\,\Delta n\, T_* \left(\frac{1}{T(H)} - \frac{1}{T_0}\right)},$$

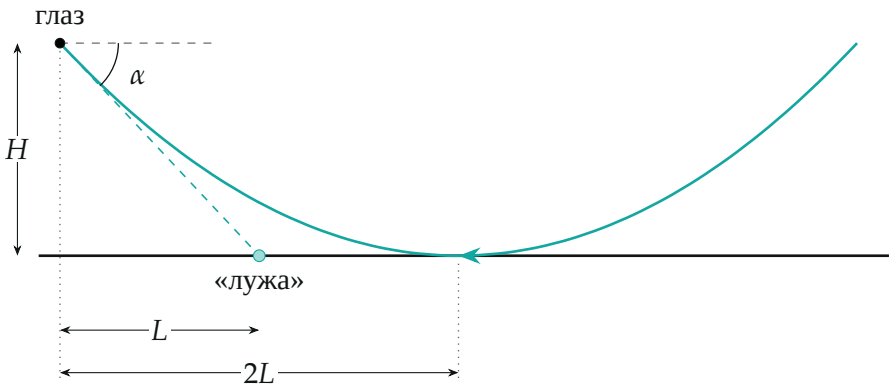
$$\alpha \approx \sqrt{2 \cdot 3{,}11 \cdot 10^{-5}} = 7{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{рад} \approx 0{,}45^\circ.$$

Луч действительно почти горизонтален, приближение малых углов законно.

4. Где видна «лужа». Глаз видит свет неба приходящим снизу под углом α и продолжает луч назад по прямой. Эта прямая — касательная к траектории в точке глаза — пересекает асфальт на расстоянии

$$L = \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{H}{\alpha}.$$

Там наблюдатель и видит отражение неба, то есть «мокрый» асфальт.



Луч от неба загибается у асфальта и приходит в глаз под углом α; глаз продолжает его прямой (пунктир) и видит небо на асфальте на расстоянии L. Вертикальный масштаб сильно растянут

5. Число.

$$L \approx \frac{1{,}7\ \text{м}}{7{,}9 \cdot 10^{-3}} \approx 2{,}2 \cdot 10^{2}\ \text{м} \quad (215\ \text{м}).$$

Обратите внимание: самая низкая точка луча (вершина параболы) лежит вдвое дальше, на расстоянии $2L \approx 430$ м. Для параболы $y = H\left(1 - \dfrac{x}{2L}\right)^2$ касательная в точке глаза $x = 0$ пересекает землю ровно посередине между глазом и вершиной. Но наблюдатель видит «лужу» не в вершине, а там, куда смотрит, — в точке пересечения прямой взгляда с асфальтом.

Проверка. Размерность: $n_H - n_0$ безразмерно, α в радианах, $L = H/\alpha$ — метры. Предел: при одинаковой температуре по высоте $n_H = n_0$, $\alpha \to 0$ и $L \to \infty$ — миража нет, луч не загибается. Второй способ: точный расчёт без приближения малых углов, $\cos\alpha = n_0/n_H$, даёт $\alpha = 7{,}884 \cdot 10^{-3}$ и $L = H\operatorname{ctg}\alpha = 215{,}6$ м — то же. Чем сильнее нагрет асфальт, тем больше α и тем ближе кажется «лужа».

Ответ. $L = H\operatorname{ctg}\alpha$, где $\cos\alpha = \dfrac{n(0)}{n(H)}$, $n(y) - 1 = \Delta n\,\dfrac{T_*}{T(y)}$; $L \approx 215$ м.