Сжатие и расширение газа

Задача 4. [МОШ 2021/22, 10 класс, задача 4] В вертикальном цилиндре, закрытом поршнем, находится некоторое количество идеального газа, молярная теплоёмкость которого при постоянном объёме c_V в условиях этой задачи равна $\frac{5R}{2}$. Конструктивные особенности цилиндра таковы, что поршень может удерживаться неподвижно специальными защёлками в двух положениях 1 и 2, при этом в положении 1 объём газа под поршнем на 1 % больше, чем в положении 2.

Сначала поршень находится в положении 1, температура газа в цилиндре равна температуре окружающей среды. Поршень быстро (так что теплообмен с окружающей средой не успевает произойти) сдвигают в положение 2, в котором поршень фиксируется защёлками. После этого в течение некоторого времени происходит выравнивание температур газа и окружающей среды, а по окончании этого процесса поршень также быстро, как при сжатии газа, возвращается в положение 1, в котором он опять фиксируется защёлками, после чего некоторое время происходит теплообмен с окружающей средой и выравнивание температур. В итоге газ под поршнем возвращается в исходное состояние: его температура и объём становятся такие же, как в начале процесса.

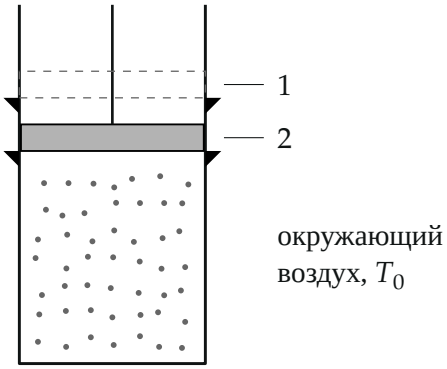
Эта последовательность (иначе говоря, цикл) процессов, которые предлагается считать квазистатическими, повторяется многократно. Температуру окружающей среды можно считать почти постоянной в течение одного цикла.

1. (3 балла) Охладится или нагреется воздух, окружающий цилиндр, после многократного повторения описанного цикла?
2. (4 балла) Для одного цикла определите отношение абсолютной величины работы, совершённой газом, к количеству теплоты, которое газ отдаёт окружающей среде на участке охлаждения.

Указание. Для малых изменений параметров идеального газа (T, p, V) из уравнения состояния следует формула:

$$\nu R\,\Delta T = V\,\Delta p + p\,\Delta V,$$

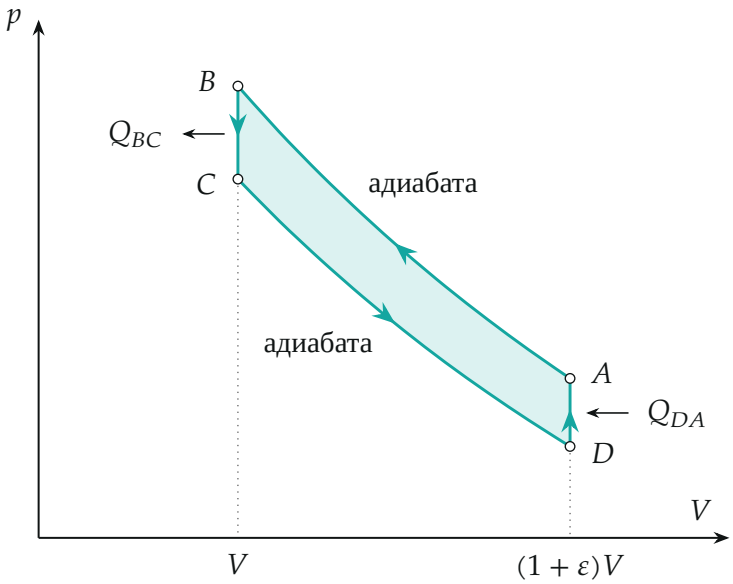
где ν — количество вещества, а R — универсальная газовая постоянная.



Поясняющий рисунок: поршень в положении 2, пунктир — положение 1 (разница объёмов сильно преувеличена), треугольники — защёлки

▲ **Решение.** **Что происходит.** Цикл состоит из четырёх участков: быстрое сжатие — адиабата, остывание при закреплённом поршне — изохора, быстрое расширение — адиабата, нагревание при закреплённом поршне — изохора. На pV-диаграмме это узкий четырёхугольник; его площадь — работа за цикл, а направление обхода говорит, кто над кем совершает работу. Ключевые законы: первое начало термодинамики для каждого участка и за цикл, уравнение адиабаты для малого изменения объёма. Класс задачи: цикл с малыми изменениями параметров — всё считаем в первом порядке малости.

Обозначения. V — объём газа в положении 2, $(1+\varepsilon)V$ — в положении 1, $\varepsilon = 0{,}01$; p_0, T_0 — давление и температура газа в начале (температура среды); состояния: A — начало (положение 1), B — после быстрого сжатия, C — после остывания, D — после быстрого расширения; $\gamma = \dfrac{c_V + R}{c_V} = \dfrac{7}{5}$ — показатель адиабаты.



Цикл $ABCDA$ на pV-диаграмме (изменения сильно преувеличены, точки посчитаны для $\varepsilon = 0{,}25$). Обход против часовой стрелки; закрашенная площадь — работа внешних сил над газом за цикл

1. Адиабата при малом изменении объёма. На быстром участке теплообмена нет. Первое начало термодинамики для газа: $\nu c_V\,\Delta T = -p\,\Delta V$ (изменение внутренней энергии равно работе над газом). Вместе с указанием $\nu R\,\Delta T = V\Delta p + p\Delta V$ исключаем ΔT:

$$\frac{c_V}{R}\,(V\Delta p + p\Delta V) = -p\Delta V \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta p}{p} = -\gamma\,\frac{\Delta V}{V},$$

а из первого начала и уравнения состояния $pV = \nu RT$

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{R}{c_V}\,\frac{\Delta V}{V} = -(\gamma-1)\frac{\Delta V}{V}.$$

Знак словами: при сжатии ($\Delta V < 0$) давление и температура растут.

2. Четыре состояния цикла. Выразим всё через p_0, T_0 и ε (с точностью до первого порядка по ε).

- $A \to B$, адиабатное сжатие, $\Delta V/V = -\varepsilon$: $p_B = p_0(1+\gamma\varepsilon)$, $T_B =$

$T_0(1 + (\gamma - 1)\varepsilon)$.

- $B \to C$, изохорное остывание до T_0 при объёме V: по уравнению состояния $p_C = p_0(1+\varepsilon)$ (объём меньше на ε, температура та же).
- $C \to D$, адиабатное расширение, $\Delta V/V = +\varepsilon$: $p_D = p_0(1+\varepsilon)(1-\gamma\varepsilon) \approx p_0(1-(\gamma-1)\varepsilon)$, $T_D = T_0(1-(\gamma-1)\varepsilon)$.
- $D \to A$, изохорное нагревание до T_0 при объёме $(1+\varepsilon)V$: давление возвращается к p_0.

Обе изохоры получились одной «высоты»:

$$\Delta p_V = p_B - p_C = p_0 - p_D = (\gamma - 1)\,\varepsilon\, p_0.$$

Пункт 1.

3. Направление обхода и знак работы. Сжатие $A \to B$ идёт по верхней адиабате (давление выше), расширение $C \to D$ — по нижней. Работа газа при сжатии отрицательна и по модулю равна площади под верхней кривой, при расширении положительна и равна площади под нижней. Поэтому за цикл работа газа

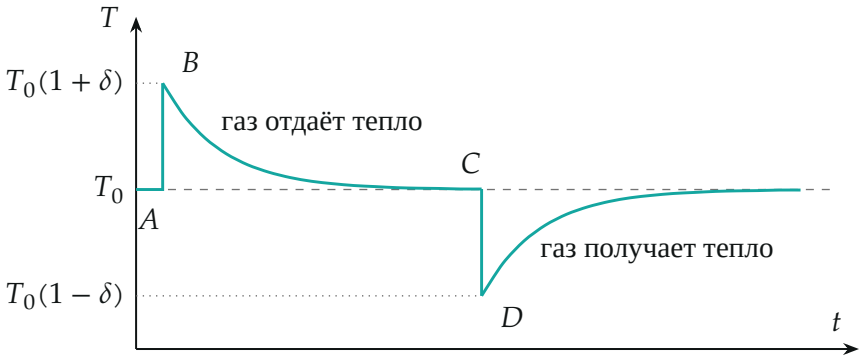
$$A_\text{г} = -S_{ABCD} < 0.$$

Цикл обходится против часовой стрелки: это не тепловой двигатель, а «нагреватель» — внешняя сила, двигающая поршень, совершает над газом положительную работу $|A_\text{г}|$.

4. Куда уходит эта работа. Первое начало термодинамики для газа за цикл: газ вернулся в исходное состояние, $\Delta U = 0$, поэтому полученная газом за цикл теплота

$$Q_{DA} - Q_{BC} = A_\text{г} < 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{BC} = Q_{DA} + |A_\text{г}|.$$

Здесь $Q_{BC} > 0$ — теплота, отданная среде при остывании, $Q_{DA} > 0$ — взятая у среды при нагревании. Газ отдаёт воздуху больше, чем забирает, на $|A_\text{г}|$ за каждый цикл. Значит, *окружающий воздух нагревается*: работа внешней силы через газ переходит в тепло среды.

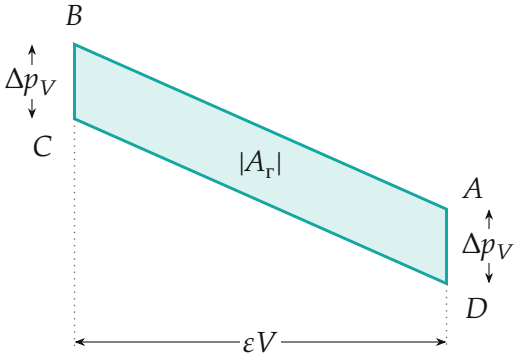


Температура газа за один цикл, $\delta = (\gamma - 1)\varepsilon$: скачки — быстрые адиабаты, плавные участки — теплообмен со средой (масштаб по вертикали преувеличен)

Пункт 2.

5. Работа за цикл. При малом ε адиабаты на коротком отрезке объёма εV — почти прямые с одинаковым наклоном $-\gamma p_0/V$, поэтому четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Его вертикальные стороны — изохоры длиной Δp_V, расстояние между ними по горизонтали εV. Площадь параллелограмма — сторона на высоту к ней:

$$|A_\text{г}| = \Delta p_V \cdot \varepsilon V = (\gamma - 1)\,\varepsilon^2\, p_0 V.$$



При малом ε цикл — параллелограмм: площадь равна стороне Δp_V, умноженной на высоту εV

6. Теплота, отданная при охлаждении. На изохоре $B \to C$ работы нет, и по первому началу газ отдаёт ровно убыль внутренней энергии. С указанием при $\Delta V = 0$: $\nu R\,\Delta T = V\Delta p$, поэтому

$$Q_{BC} = \nu c_V\,(T_B - T_0) = \frac{c_V}{R}\,V\,\Delta p_V = \frac{5}{2}\,V\,(\gamma - 1)\,\varepsilon\,p_0.$$

Второй способ: $T_B - T_0 = (\gamma-1)\varepsilon T_0 = \dfrac{R}{c_V}\varepsilon T_0$, и $Q_{BC} = \nu c_V \cdot \dfrac{R}{c_V}\varepsilon T_0 = \nu R T_0\,\varepsilon = p_0 V\varepsilon$ — то же, потому что $\dfrac{5}{2}(\gamma - 1) = 1$.

7. Отношение. Делим, $p_0 V$ сокращается:

$$\frac{|A_\text{г}|}{Q_{BC}} = \frac{(\gamma-1)\varepsilon^2 p_0 V}{\frac{c_V}{R}(\gamma-1)\varepsilon\,p_0 V} = \frac{R}{c_V}\,\varepsilon = \frac{2}{5}\cdot 0{,}01 = 4\cdot 10^{-3}.$$

Обратите внимание: работа за цикл — второго порядка по ε, а теплота — первого. Поэтому работу нельзя считать как «$p\,\Delta V$ на одной адиабате»: работы на сжатии и расширении почти равны и почти полностью сокращаются, остаётся только узкая площадь между адиабатами.

Проверка. Размерность: и $|A_\text{г}|$, и Q_{BC} пропорциональны $p_0 V$ — джоули, отношение безразмерно. Предел: при $\varepsilon \to 0$ отношение стремится к нулю — цикл вырождается в точку. Точный расчёт без приближений (адиабаты $pV^{7/5} = \text{const}$, работа $\dfrac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$ на каждой) даёт $3{,}97\cdot 10^{-3}$ — в пределах точности первого порядка. Физический смысл: в тепло среды переходит лишь 0,4 % от того, что газ отдаёт при остывании; остальное он тут же забирает обратно на нагревании.

Ответ. 1) Воздух, окружающий цилиндр, нагреется: за цикл газ отдаёт среде на $|A_\text{г}|$ больше теплоты, чем получает; 2) $\dfrac{|A_\text{г}|}{Q} = \dfrac{R}{c_V}\,\varepsilon = 4\cdot 10^{-3}$.