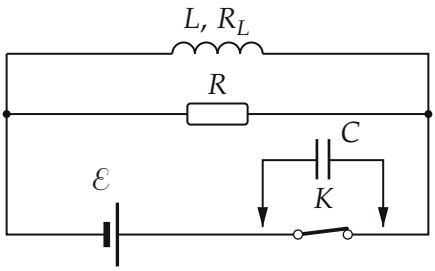
Явления при размыкании

Задача 1. [МОШ 2021/22, 11 класс, задача 1] В цепях с большой индуктивной нагрузкой ключ часто шунтируют конденсатором (подключают его параллельно ключу), подобно тому как это схематично показано на рисунке ниже. Предлагается рассмотреть две цепи, собранные по схеме, показанной на рисунке: в первой ключ зашунтирован, а во второй — нет. В обеих цепях изначально ключ замкнут, токи установились. Численные значения параметров цепей следующие: $\mathscr{E} = 10$ В, $R = 100$ Ом, $R_L = 10$ Ом (сопротивление провода, которым намотана катушка), $L = 0{,}1$ Гн, $C = 1$ мкФ. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.



1. (2 б.) Определите отношение $\dfrac{U_1}{U_2}$ напряжений на резисторе сразу после размыкания ключа в первой и второй цепи.
2. (4 б.) Найдите количество теплоты Q_1, выделяющееся после размыкания ключа в первой цепи, и количество теплоты Q_2, которое выделяется на резисторе R после размыкания ключа во второй цепи.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока ключ замкнут, батарея питает две параллельные ветви: катушку и резистор. Ключ размыкает ветвь батареи, но ток катушки скачком измениться не может: сразу после размыкания в ней течёт тот же ток I_0, что и до него. Дальше всё определяет вопрос, куда этому току деваться. Во второй цепи у него один путь — через резистор R. В первой есть ещё путь через конденсатор и батарею:

конденсатор в первый момент не заряжен и ток пропускает. Задача относится к классу «ток катушки известен, остальное — законы Кирхгофа и энергия».

Обозначения. I_0 — установившийся ток катушки до размыкания; U_1, U_2 — модули напряжений на R сразу после размыкания в первой и второй цепи; $W = \dfrac{LI_0^2}{2}$ — энергия катушки в этот момент.

Пункт 1.

1. Ток катушки до размыкания. Батарея без внутреннего сопротивления подаёт на каждую параллельную ветвь напряжение $\mathcal{E}$. Токи установились, поэтому в катушке нет ЭДС самоиндукции ($L\,dI/dt = 0$), и всё напряжение падает на её сопротивлении R_L:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_L} = 1\text{ А}, \qquad I_R = \frac{\mathcal{E}}{R} = 0{,}1\text{ А}.$$

Ток течёт в обеих ветвях в одну сторону: от положительного полюса батареи, то есть на схеме справа налево по верхним проводам.

2. Вторая цепь сразу после размыкания. Батарея отключена, остались катушка и резистор в одном контуре. В узел сходятся только две ветви, поэтому по первому закону Кирхгофа (заряд в узле не накапливается) ток через резистор равен току катушки: $|I_R| = I_0$. Он течёт через R уже в обратную сторону по сравнению с прежним:

$$U_2 = I_0 R = \frac{\mathcal{E}R}{R_L} = 100\text{ В}.$$

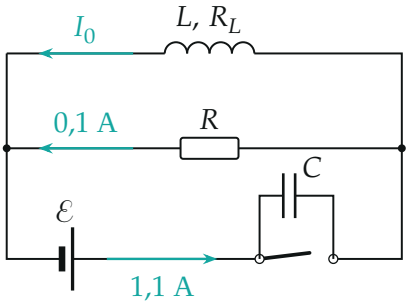
Обратите внимание: напряжение на резисторе в десять раз больше ЭДС батареи.

3. Первая цепь сразу после размыкания. Конденсатор был закорочен замкнутым ключом, его заряд до размыкания равен нулю, поэтому и сразу после размыкания напряжение на нём нуль. Ветвь «батарея + конденсатор» подключена к тем же двум узлам, что и резистор, и напряжение на этой ветви $\mathcal{E} - \dfrac{q}{C} = \mathcal{E}$ при $q = 0$. Резистор включён параллельно

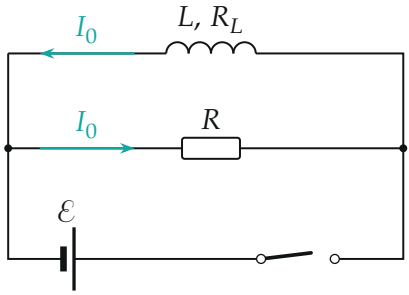
ей, значит

$$U_1 = \mathcal{E} = 10\ \text{В}.$$

Согласуется с токами: через R по-прежнему идёт $I_R = \mathcal{E}/R = 0{,}1$ А в прежнем направлении, а ток катушки I_0 замыкается через ветвь батареи и конденсатора, и в этой ветви течёт $I_0 + I_R = 1{,}1$ А. Токи показаны на рисунке.



а) цепь 1



б) цепь 2

Токи сразу после размыкания ключа; в катушке $I_0 = 1$ А в обеих цепях

4. Отношение.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}R/R_L} = \frac{R_L}{R} = 0{,}1.$$

Знак: в первой цепи напряжение на R не изменило направления, во второй изменило на противоположное; в ответе стоит отношение модулей.

Пункт 2.

5. Вторая цепь: тепло на резисторе. После размыкания в контуре нет источников, поэтому вся энергия катушки уходит в тепло на R и R_L. Эти сопротивления соединены последовательно, ток у них общий, мощности относятся как сопротивления, и на резистор R приходится доля $\dfrac{R}{R+R_L}$:

$$Q_2 = \frac{LI_0^2}{2}\cdot\frac{R}{R+R_L} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_L^2}\cdot\frac{R}{R+R_L} = 0{,}05\ \text{Дж}\cdot\frac{100}{110} \approx 4{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{Дж}.$$

6. Первая цепь: чем кончится процесс. Токи будут затухать, пока не исчезнут совсем. Тогда на резисторе напряжения нет, а значит, нет его и на ветви «батарея + конденсатор»: $\mathcal{E} - \dfrac{q_\infty}{C} = 0$, то есть конденсатор окажется заряжен до заряда $q_\infty = C\mathcal{E}$.

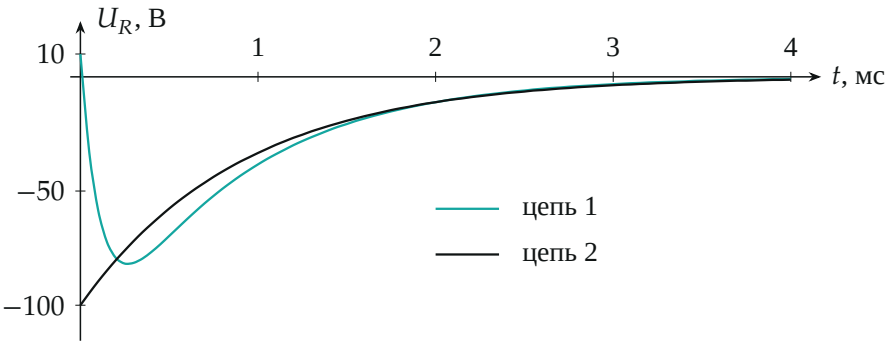
7. Энергетический баланс первой цепи — от размыкания до конца процесса. Энергия катушки W была в начале. Заряд q_∞ прошёл через батарею по направлению её ЭДС (ток в ветви течёт от минуса батареи к плюсу, как и раньше), поэтому батарея совершила работу $A = \mathcal{E}q_\infty = C\mathcal{E}^2$. Энергия $\dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}$ осталась в конденсаторе, остальное — тепло Q_1 на R и R_L вместе (вопрос задачи — о всей теплоте цепи):

$$Q_1 + \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} + C\mathcal{E}^2 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{LI_0^2}{2} + \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_L^2}\left(1 + \frac{CR_L^2}{L}\right).$$

Числа: $\dfrac{L\mathcal{E}^2}{2R_L^2} = 0{,}05$ Дж, поправка $\dfrac{CR_L^2}{L} = 10^{-3}$, итого $Q_1 \approx 5 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Обратите внимание: в поправку входит R_L, а не R: энергия конденсатора $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$, где $\mathcal{E} = I_0 R_L$. С R вместо R_L получилась бы поправка 10^{-1} и ответ $5{,}5 \cdot 10^{-2}$ Дж — опечатка, которая встречается в записи ответа.

8. Что происходит с напряжением на R позже. Решение уравнений контура на компьютере даёт такие кривые: во второй цепи напряжение на резисторе спадает по экспоненте с $\tau = \dfrac{L}{R + R_L} \approx 0{,}9$ мс, а в первой после начальных $+10$ В за четверть миллисекунды меняет знак и доходит почти до -80 В: конденсатор заряжается током больше 1 А и быстро набирает напряжение.



Напряжение на резисторе R после размыкания (численный расчёт)

Проверка. Размерность: LI^2 и $C\mathcal{E}^2$ — джоули. Предел $C \to 0$: конденсатор пропадает, первая цепь превращается во вторую, и $Q_1 \to \frac{1}{2}LI_0^2 = 0{,}05$ Дж — вся энергия катушки, как и должно быть. Численный расчёт уравнений первой цепи даёт $Q_1 = 0{,}05005$ Дж, как по формуле.

Смысл: конденсатор почти не меняет суммарную теплоту, но в первый момент снимает скачок напряжения: вместо 100 В на резисторе (и около 110 В на размыкающемся ключе) — ноль на ключе и прежние 10 В на резисторе.

Ответ. 1) $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{R_L}{R} = 0{,}1$; 2) $Q_1 = \dfrac{L\mathcal{E}^2}{2R_L^2}\left(1 + \dfrac{CR_L^2}{L}\right) \approx 5 \cdot 10^{-2}$ Дж, $Q_2 = \dfrac{L\mathcal{E}^2}{2R_L^2} \cdot \dfrac{R}{R + R_L} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-2}$ Дж.