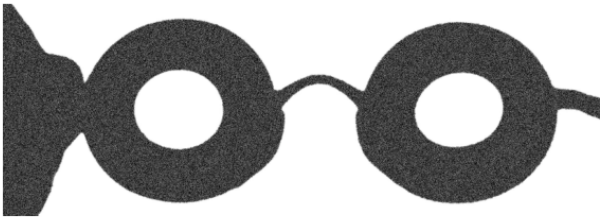
Очки составителя

Задача 2. [МОШ 2021/22, 11 класс, задача 2] Один из составителей заданий олимпиады носит очки в очень тонкой оправе, оптическая сила линз которых равна +2 дптр. Если эти очки снять с составителя и расположить их под светодиодной лампочкой, закреплённой на потолке комнаты, так, чтобы плоскости линз были параллельны полу, то на полу можно будет наблюдать резкую тень от оправы и линз, а также две ярко освещённые области в центрах теней линз (см. обработанный фрагмент фотографии ниже).



Считая лампочку точечным источником света, определите, на каком расстоянии от пола следует держать очки, чтобы диаметр светлого пятна в середине тени одной из линз был примерно в два раза меньше диаметра тени линзы. Высота потолка в комнате равна 3 м. Считайте, что линия, соединяющая лампочку и оптический центр линзы, перпендикулярна полу. Учтите, что искомое расстояние не должно быть больше 1 м.

▲ **Решение. Что происходит.** Лампа — точечный источник, свет идёт от неё расходящимся пучком. Оправа и край линзы непрозрачны, их тень на полу ограничена лучами от лампы через край линзы: она больше самой линзы, потому что пучок расходится. Свет, прошедший через стекло, преломляется и собирается в изображение лампы; дальше он снова расходится или ещё сходится — зависит от того, где пол относительно изображения. Сечение этого пучка на полу и есть светлое пятно в центре тени. Задача сводится к двум подобиям треугольников и формуле линзы: диаметр тени и диаметр пятна выражаются через высоту очков x, и их отношение приравнивается к $1/2$.

Обозначения. $F = \dfrac{1}{2\text{ дптр}} = 0{,}5$ м — фокусное расстояние; D — диаметр линзы; $h = 3$ м — высота потолка (лампа S); x — искомая высота очков над полом; $d = h - x$ — расстояние от лампы до очков; y — расстояние от очков до изображения лампы S^*; D_1 — диаметр тени линзы на полу; D_2 — диаметр светлого пятна.

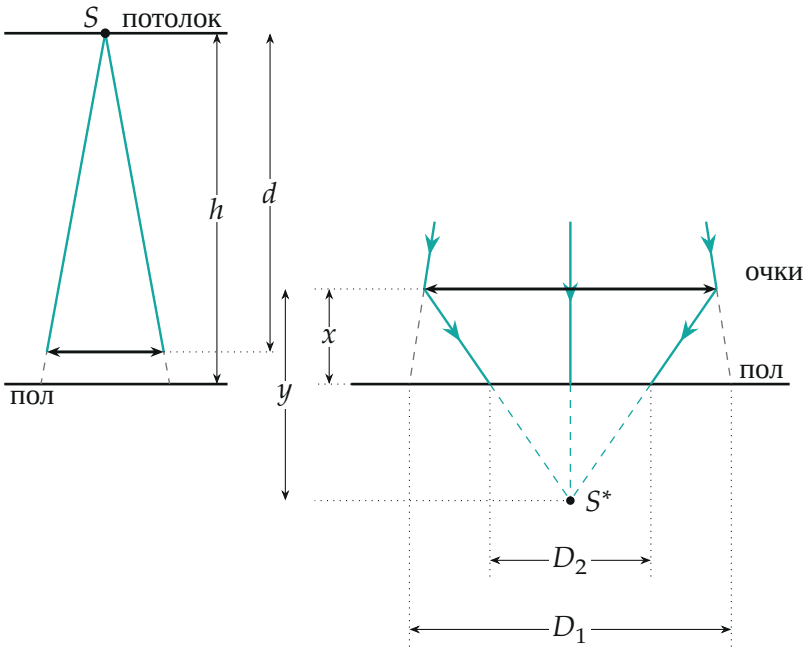
1. Тень линзы. Лучи от лампы через противоположные края линзы образуют конус с вершиной в лампе. Треугольник с основанием D на расстоянии d от вершины подобен треугольнику с основанием D_1 на расстоянии h:

$$\frac{D_1}{D} = \frac{h}{d} = \frac{3}{3-x}.$$

2. Изображение лампы. Формула тонкой линзы для источника на расстоянии d и действительного изображения на расстоянии y:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{dF}{d-F} = \frac{0{,}5\,(3-x)}{2{,}5-x} = \frac{3-x}{5-2x} \text{ (в метрах).}$$

Пока очки ниже метра над полом, $d \geqslant 2$ м $> F$, и изображение действительное: оно лежит за линзой, под ней, на расстоянии y. Пол находится под линзой на расстоянии x, так что изображение может оказаться и выше пола ($y < x$), и ниже него ($y > x$).



Слева — вся комната, по горизонтали масштаб увеличен; справа — участок у пола при $x = 0{,}275$ м, изображение лампы лежит под полом

3. Светлое пятно. Лучи, прошедшие через линзу диаметром D, образуют конус с вершиной в изображении S^*. Сечение этого конуса на расстоянии x от линзы (на полу) подобно сечению у линзы: расстояние от вершины до пола равно $|y - x|$, а до линзы — y:

$$\frac{D_2}{D} = \frac{|y - x|}{y}.$$

Модуль учитывает оба случая: пол может быть до изображения (пучок ещё сходится) или после него (пучок уже расходится). Знак отличается, сечение — нет.

4. Условие задачи. Из $D_2 = \dfrac{D_1}{2}$ следует

$$\frac{|y - x|}{y} = \frac{3}{2(3 - x)} \qquad \text{где} \qquad \frac{x}{y} = \frac{x(5 - 2x)}{3 - x}.$$

Разберём два случая.

Изображение ниже пола, $y > x$. Тогда $1 - \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2(3-x)}$, то есть

$$3 - x - x(5-2x) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 12x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

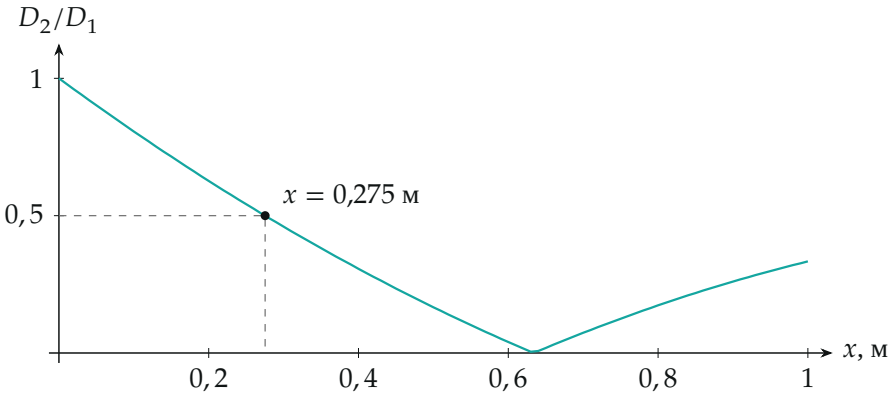
Корень $x = \dfrac{3+\sqrt{6}}{2} \approx 2{,}72$ м не годится: он больше метра, а при нём $d < F$ и формула даёт $y < 0$ (мнимое изображение, к случаю $y > x$ не относится). Остаётся $x = \dfrac{3-\sqrt{6}}{2} \approx 0{,}275$ м. Проверка условия случая: $y = \dfrac{3-x}{5-2x} \approx 0{,}612$ м $> x$.

Изображение выше пола, $y < x$. Тогда $\dfrac{x}{y} - 1 = \dfrac{3}{2(3-x)}$, откуда $\dfrac{x(5-2x)}{3-x} = \dfrac{9-2x}{2(3-x)}$ и

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x-3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}5 \text{ м}.$$

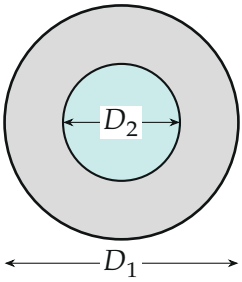
Это больше метра, по условию не подходит.

Обратите внимание: ограничение «не больше 1 м» нужно именно затем, чтобы отсечь корни 2,72 и 1,5 м. На графике видно, что при $x \leqslant 1$ м отношение D_2/D_1 достигает $\frac{1}{2}$ ровно один раз.



Отношение диаметров светлого пятна и тени в зависимости от высоты очков

Обратите внимание на ноль графика при $x \approx 0{,}63$ м: там изображение лампы лежит как раз на полу ($y = x$), пятно стягивается в точку.



Вид сверху на пол: тень линзы и светлое пятно в центре

Проверка. При $x \approx 0{,}275$ м: $d \approx 2{,}725$ м, $D_1 \approx 1{,}10\,D$, $D_2 \approx 0{,}551\,D$, отношение равно 0,500. Предел $x \to 0$ (очки на полу): $D_1 = D$ и $y = 0{,}6$ м $> x$, поэтому $D_2 = D$ — пятно совпадает с линзой, тень вокруг не успевает образоваться, как и должно быть.

Смысл: очки надо держать совсем близко к полу, на 27,5 см. Изображение лампы тогда лежит на 34 см ниже пола, и на полу видно сечение ещё не сфокусированного пучка, вдвое более узкое, чем тень.

Ответ. $x = \dfrac{3 - \sqrt{6}}{2}$ м $\approx 27{,}5$ см.