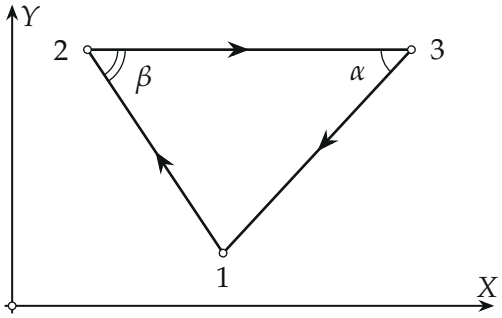
Расчёт цикла

Задача 3. [МОШ 2021/22, 11 класс, задача 3] С одним молем идеального газа, молярная теплоёмкость которого при постоянном объёме c_V равна $2R$, где R — универсальная газовая постоянная, проводится циклический процесс 1231, график которого в логарифмических координатах ($x = \ln \dfrac{V}{V_0}$, $y = \ln \dfrac{p}{p_0}$, где p_0 и V_0 — некоторые неизвестные постоянные) имеет форму треугольника с углами $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ и $\beta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (см. рисунок ниже). Отношение максимального давления газа к минимальному в этом процессе равно n.



1. (4 б.) Считая известной температуру T_1 в точке 1, найдите температуры T_2 и T_3 в точках 2 и 3.
2. (4 б.) Определите КПД η цикла.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Прямая в координатах $\ln V$, $\ln p$ означает степенную связь $p \propto V^k$, где k — тангенс угла наклона прямой (со знаком). Поэтому каждая сторона треугольника — знакомый процесс: по наклону находим показатель k и узнаём, что это за процесс. Размеры треугольника по осям даёт отношение давлений n: оно задаёт вертикальную сторону, а наклоны — горизонтальные. Остаётся посчитать температуры по уравнению Менделеева — Клапейрона и тепло по участкам. Класс задачи: цикл, заданный в нестандартных координатах — сначала переводим его в привычные.

Обозначения. p_1, V_1 — давление и объём в точке 1; Q_{12}, Q_{23}, Q_{31} — теплота, полученная газом на участках; γ — показатель адиабаты.

Пункт 1.

1. Какие это процессы. Показатель адиабаты газа с $c_V = 2R$:

$$\gamma = \frac{c_V + R}{c_V} = \frac{3R}{2R} = \frac{3}{2}.$$

Теперь по наклонам сторон (идём по стрелкам):

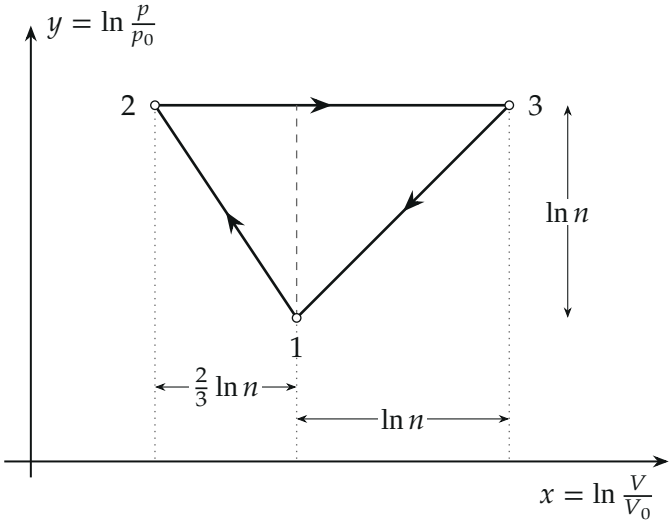
- *Сторона 2–3 горизонтальна*: $\ln p = \text{const}$, то есть $p = \text{const}$ — изобара. Объём растёт, газ расширяется.
- *Сторона 1–2.* Угол β при вершине 2 лежит между горизонтальной стороной и стороной 2–1, которая спускается вправо, поэтому наклон прямой равен $-\operatorname{tg}\beta = -\frac{3}{2}$. То есть $p \propto V^{-3/2}$, или $pV^{3/2} = \text{const}$ — это адиабата: показатель в точности равен γ. По стрелке $1 \to 2$ объём уменьшается: газ адиабатически сжимается.
- *Сторона 3–1.* Угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ при вершине 3: сторона $3 \to 1$ спускается влево с наклоном $+1$: $p \propto V$, то есть $p/V = \text{const}$. Объём и давление убывают пропорционально друг другу.

2. Размеры треугольника в логарифмах. Из условия $p_{\max}/p_{\min} = n$: точки 2 и 3 лежат на уровне $p_{\max}$, точка 1 — на уровне $p_{\min}$ (самая нижняя), поэтому

$$y_2 - y_1 = \ln n.$$

Сторона 3–1 имеет наклон 1, поэтому $x_3 - x_1 = \ln n$; сторона 1–2 имеет наклон $-\frac{3}{2}$, поэтому $x_1 - x_2 = \frac{2}{3}\ln n$. Возвращаясь от логарифмов к величинам:

$$\frac{V_3}{V_1} = n, \qquad \frac{V_2}{V_1} = n^{-2/3}, \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_1} = n.$$



Размеры треугольника в логарифмических координатах

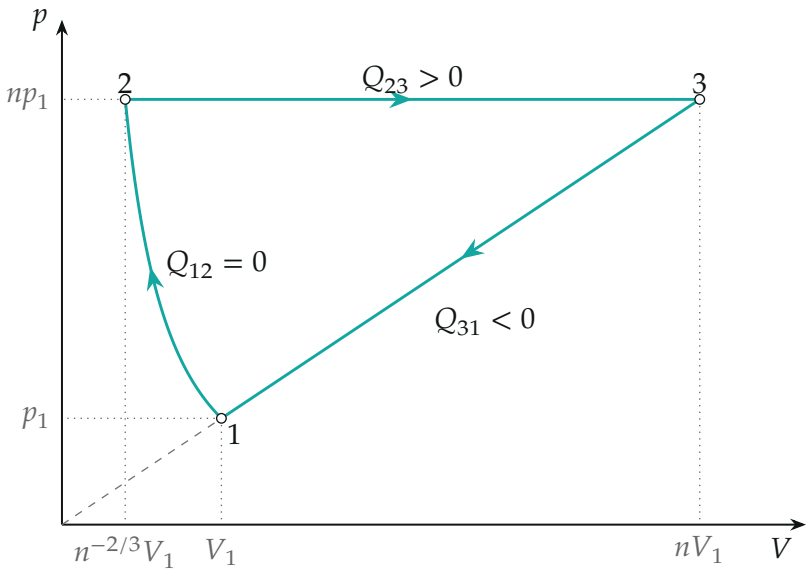
3. Температуры. Для одного моля уравнение Менделеева — Клапейрона даёт $T = \dfrac{pV}{R}$. Выразим точки 2 и 3 через точку 1, а неизвестные p_1, V_1 сократим делением:

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = T_1\, n \cdot n^{-2/3} = T_1\, n^{1/3},$$
$$T_3 = T_1 \cdot \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1} = T_1\, n \cdot n = T_1\, n^2.$$

Второй способ для T_2: на адиабате $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, то есть $TV^{1/2} = \text{const}$, отсюда $T_2 = T_1 \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{1/2} = T_1\, n^{1/3}$ — то же. Для T_3 на изобаре $T_3/T_2 = V_3/V_2 = n^{5/3}$, и $T_3 = T_1\, n^{1/3+5/3} = T_1\, n^2$.

Пункт 2.

4. Тот же цикл в координатах p–V. Для наглядности нарисуем цикл в привычных осях. Точки посчитаны для $n = 4$: $V_2 = 0{,}397\, V_1$, $V_3 = 4\, V_1$.



Цикл в координатах p–V при $n = 4$: адиабата, изобара и прямая, продолжение которой проходит через начало

5. Где газ получает тепло, а где отдаёт.

Участок 1–2 (адиабата). Теплообмена нет: $Q_{12} = 0$.

Участок 2–3 (изобара). Температура растёт, $T_3 > T_2$, значит газ получает тепло. Молярная теплоёмкость при постоянном давлении $c_p = c_V + R = 3R$:

$$Q_{23} = c_p(T_3 - T_2) = 3R\,T_1\left(n^2 - n^{1/3}\right) > 0.$$

Участок 3–1 ($p = kV$). Работа газа при расширении на малый шаг dV: $\delta A = p\,dV = kV\,dV = \dfrac{k}{2}\,d(V^2) = \dfrac{1}{2}\,d(pV) = \dfrac{R}{2}\,dT$. Первое начало термодинамики для малого шага:

$$\delta Q = c_V\,dT + \delta A = \left(2R + \frac{R}{2}\right)dT = \frac{5}{2}R\,dT.$$

На всём участке $dT < 0$ (газ охлаждается, $T_1 < T_3$), значит $\delta Q < 0$ на каждом малом шаге: газ тепло отдаёт, и нигде не получает (если бы знак

менялся, участок пришлось бы делить). Суммируя:

$$Q_{31} = \frac{5}{2}R\,(T_1 - T_3) = -\frac{5}{2}R\,T_1\left(n^2 - 1\right) < 0.$$

6. КПД. Газ получает тепло только на участке 2–3, отдаёт — на участке 3–1. КПД цикла (отношение совершённой работы к полученной теплоте; за цикл $\Delta U = 0$, значит работа равна полученному теплу за вычетом отданного):

$$\eta = \frac{Q_{23} - |Q_{31}|}{Q_{23}} = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{23}} = 1 - \frac{5\,(n^2-1)}{6\,(n^2 - n^{1/3})}.$$

Проверка. Второй способ — через работу. Работа на участках цикла в единицах p_1V_1: на изобаре 2–3 $A_{23} = n\,(n - n^{-2/3})$; на 3–1 (трапеция под прямой) $A_{31} = -\dfrac{(n^2-1)}{2}$; на адиабате $A_{12} = -c_V(T_2 - T_1) = -2\,(n^{1/3} - 1)$. Сумма $A = \dfrac{n^2}{2} - 3n^{1/3} + \dfrac{5}{2}$, а $Q_{23} = 3\,(n^2 - n^{1/3})$ в тех же единицах, откуда

$$\eta = \frac{A}{Q_{23}} = \frac{n^2 - 6n^{1/3} + 5}{6\,(n^2 - n^{1/3})},$$

что совпадает с ответом выше. Численно при $n = 4$: $\eta = 0{,}133$ обоими способами. Предел $n \to 1$: цикл стягивается в точку, $\eta \to 0$: при $n = 1+\varepsilon$ числитель $5(n^2-1) \approx 10\varepsilon$, знаменатель $6(n^2 - n^{1/3}) \approx 10\varepsilon$ и $\eta \to 0$, как и должно быть.

Смысл: КПД мал, потому что почти всё полученное на изобаре тепло уходит на участке 3–1, где газ одновременно остывает и сжимается.

Ответ. 1) $T_2 = T_1\,n^{1/3}$, $T_3 = T_1\,n^2$; 2) $\eta = 1 - \dfrac{5\,(n^2-1)}{6\,(n^2 - n^{1/3})}$.