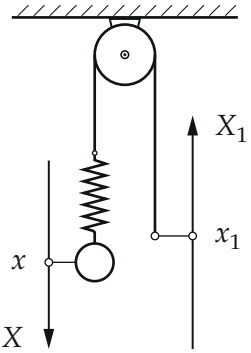
Вынуждают колебаться!

Задача 4. [МОШ 2021/22, 11 класс, задача 4] К одному концу невесомой нити, перекинутой через идеальный блок, присоединён пружинный маятник, состоящий из лёгкой пружины с тяжёлым шариком. Собственная частота колебаний маятника (в отсутствие затухания) равна ω_0. На другой конец нити действует такая внешняя сила, что начиная с нулевого момента времени его координата по вертикали меняется по закону $x_1(t) = A\sin(\Omega t)$ (см. рисунок). В нулевой момент времени маятник находится в положении равновесия и не движется. В обеих частях задачи считается, что нить при колебаниях ни в один из моментов времени не провисает. Шарик движется только по вертикали и не раскачивается.



1. (4 б.) В этой части предлагается пренебречь всеми силами сопротивления. Тогда движение шарика будет представлять собой суперпозицию колебаний с частотами Ω и ω_0:

$$x(t) = C_1\sin(\omega_0 t + \varphi) + C_2\sin(\Omega t),$$

где $x(t)$ — отклонение шарика от положения равновесия (см. рисунок), C_1, C_2, φ — неизвестные постоянные. Определите максимально возможное отклонение шарика от положения равновесия в следующих случаях: А1) (2 б.) $\Omega \gg \omega_0$; А2) (2 б.) $\Omega \ll \omega_0$.

2. (6 б.) В этой части предлагается учесть слабое затухание колебаний маятника. Предположим, что затухание обусловлено силой,

пропорциональной скорости шарика и направленной против скорости. Тогда через некоторое время после начала процесса координата шарика будет изменяться периодически по гармоническому закону с частотой Ω. Однако колебания шарика будут сдвинуты по фазе относительно колебаний конца нити, к которому прикладывается внешняя сила, на φ:

$$x(t) = C\sin(\Omega t + \varphi).$$

Определите абсолютное значение сдвига фаз φ при следующих значениях частоты Ω: B1) (4 б.) $\Omega \gg \omega_0$, $\Omega \ll \omega_0$; B2) (2 б.) $\Omega = \omega_0$.

▲ **Решение. Что происходит.** Внешняя сила двигает верхний конец пружины, а пружина тянет шарик пропорционально смещению конца *относительно шарика*. Класс задачи — вынужденные колебания осциллятора. Без трения к вынужденным колебаниям с частотой Ω добавляются собственные с ω_0 (их рождают начальные условия); с трением собственные затухают, а сдвиг фазы вынужденных решает главное слагаемое уравнения.

Обозначения. m — масса шарика, k — жёсткость пружины, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. Ось X направлена вниз; x — смещение шарика от положения равновесия, x_1 — смещение верхнего конца пружины, γ — коэффициент затухания в части B.

1. Куда сместился верхний конец пружины. Нить нерастяжима, блок идеален: внешний конец поднялся на x_1 — верхний конец пружины опустился на x_1. Оси X и X_1 противоположны, поэтому смещение вдоль X равно $x_1(t) = A\sin\Omega t$.

2. Уравнение движения. В равновесии растяжение l, $kl = mg$. Теперь растяжение $l + (x - x_1)$, и пружина тянет шарик вверх с силой $mg + k(x - x_1)$.

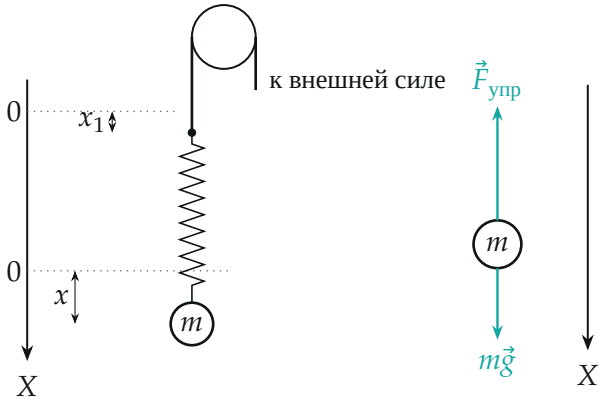
Второй закон Ньютона для шарика на ось X (вниз): mg и kl сокращаются,

$$m\ddot{x} = mg - (mg + k(x - x_1)) = -k(x - x_1).$$

Делим на m и подставляем $x_1(t)$:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 A \sin \Omega t. \qquad (*)$$

Условие «нить не провисает» гарантирует, что уравнение верно всё время.



Смещения и силы: слева — система, справа — шарик отдельно

Часть А.

3. Вынужденная составляющая. Подставим $x = C_2 \sin \Omega t$ в $(*)$: $(\omega_0^2 - \Omega^2)\, C_2 = \omega_0^2 A$,

$$C_2 = \frac{A\,\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

При $\Omega > \omega_0$ знак C_2 минус: шарик движется навстречу концу нити.

4. Начальные условия фиксируют собственную составляющую. В нулевой момент $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$. Из $x(0) = 0$ получаем $C_1 \sin \varphi = 0$, то есть $\varphi = 0$ (знак C_1 свободен). Из $\dot{x}(0) = 0$: $C_2\Omega + C_1\omega_0 = 0$, откуда $C_1 = -C_2 \dfrac{\Omega}{\omega_0}$ и

$$x(t) = C_2 \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

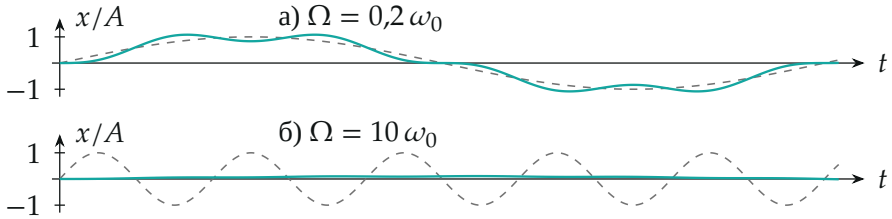
Обратите внимание: собственные колебания есть всегда — шарик стартует с покоя, а конец пружины уже движется со скоростью $A\Omega$.

5. Максимальное отклонение. В сумме двух синусов с разными частотами наибольшее значение достигается, когда оба вклада имеют одинаковый знак и максимальны по модулю (при несоизмеримых частотах — с любой точностью):

$$x_{\max} = |C_2|\left(1+\frac{\Omega}{\omega_0}\right) = \frac{A\omega_0^2}{|\omega_0^2-\Omega^2|}\cdot\frac{\omega_0+\Omega}{\omega_0} = \frac{A\,\omega_0}{|\omega_0-\Omega|}.$$

A1) $\Omega \gg \omega_0$. $x_{\max} \approx A\dfrac{\omega_0}{\Omega} \ll A$: шарик почти не движется. Конец дёргается слишком быстро, шарик не успевает; главный вклад — собственная составляющая $A\omega_0/\Omega$.

A2) $\Omega \ll \omega_0$. $x_{\max} \approx A\left(1+\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right) \approx A$: шарик следует за концом нити, как если бы пружина была жёсткой (нерастяжимой) нитью.



Шарик x/A (сплошная) и верхний конец пружины x_1/A (пунктир)

6. Второй способ: какое слагаемое главное. В $(*)$ при $\Omega \gg \omega_0$ вынужденное движение имеет $\ddot{x} \sim \Omega^2 x$, а слагаемое $\omega_0^2 x$ мало, поэтому $\ddot{x} \approx \omega_0^2 x_1$ и $x \approx -\dfrac{\omega_0^2}{\Omega^2}x_1$ — то же, что C_2 выше. При $\Omega \ll \omega_0$ мало $\ddot{x}$, остаётся $\omega_0^2 x \approx \omega_0^2 x_1$, то есть $x \approx x_1$.

Часть В.

7. Уравнение с затуханием. Сила сопротивления $-b\dot{x}$ добавляет в $(*)$ слагаемое с $\dot{x}$:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 A\sin\Omega t, \qquad \gamma = \frac{b}{2m} \ll \omega_0.$$

Свободные колебания затухают, остаётся $x = C\sin(\Omega t + \varphi)$.

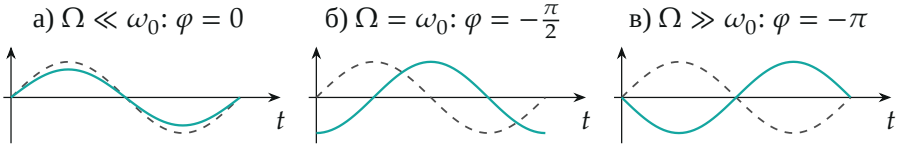
8. Сдвиг фаз через комплексную амплитуду. Запишем $x = \mathrm{Im}(\hat{c}\,e^{i\Omega t})$, $\hat{c} = Ce^{i\varphi}$; дифференцирование даёт множители $i\Omega$ и $-\Omega^2$:

$$(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega)\,\hat{c} = \omega_0^2 A \quad \Rightarrow \quad \hat{c} = \frac{A\,\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}.$$

Числитель положителен, поэтому φ — минус аргумент знаменателя; его мнимая часть $2\gamma\Omega > 0$, так что $-\pi < \varphi < 0$: шарик запаздывает.

B1. $\Omega \ll \omega_0$: знаменатель $\approx \omega_0^2 > 0$, $|\varphi| = 0$. $\Omega \gg \omega_0$: знаменатель $\approx -\Omega^2 < 0$ (мнимая часть мала, $\gamma \ll \Omega$), $|\varphi| = \pi$. *B2.* $\Omega = \omega_0$: знаменатель $2i\gamma\omega_0$ чисто мнимый, $|\varphi| = \pi/2$.

9. Второй способ: сравнение слагаемых. При $\Omega = \omega_0$ слагаемые $\ddot{x}$ и $\omega_0^2 x$ сокращаются, остаётся $2\gamma\dot{x} = \omega_0^2 A \sin\omega_0 t$: скорость $\propto \sin\omega_0 t$, смещение $\propto -\cos\omega_0 t = \sin(\omega_0 t - \pi/2)$. При $\Omega \ll \omega_0$ главные слагаемые $\omega_0^2 x$ и $\omega_0^2 x_1$, фаза та же; при $\Omega \gg \omega_0$ главные $\ddot{x} = -\Omega^2 x$ и $\omega_0^2 x_1$, и x противоположен x_1.



Установившийся режим: x_1 (пунктир) и x (сплошная), амплитуды условные

Проверка. Численный расчёт (∗): при $\Omega = 0{,}1\omega_0$ наибольшее отклонение $1{,}10A$ (формула — $1{,}11A$), при $\Omega = 10\omega_0$ — $0{,}110A$ (формула — $0{,}111A$); сдвиг фаз при $\gamma = 0{,}02\omega_0$: $-0{,}1°$, $-90°$, $-179{,}9°$ при $\Omega = 0{,}05\omega_0$, ω_0, $20\omega_0$. Предел $\gamma \to 0$: резонансная амплитуда $C = A\omega_0/(2\gamma) \to \infty$, как и должно быть.

Смысл: на низкой частоте груз ходит за концом нити, на высокой — навстречу, на резонансе отстаёт на четверть периода: внешняя сила уравновешивает трение.

Ответ. A1) $x_{\max} = A\,\dfrac{\omega_0}{\Omega} \approx 0$ при $\Omega \gg \omega_0$; A2) $x_{\max} = A\left(1 + \dfrac{\Omega}{\omega_0}\right) \approx A$ при $\Omega \ll \omega_0$. B1) $|\varphi| = \pi$ при $\Omega \gg \omega_0$ и 0 при $\Omega \ll \omega_0$; B2) $|\varphi| = \dfrac{\pi}{2}$.