# Ловушка Пеннинга

**Задача 5.** [МОШ 2021/22, 11 класс, задача 5] Ловушкой Пеннинга называется один из типов ионных ловушек — устройств, используемых в экспериментах по ядерной физике для удержания заряженных частиц и ядер в некоторой ограниченной области пространства в течение длительного (по меркам микромира) времени. В этой ловушке мощным электромагнитом создаётся однородное магнитное поле $B$, которое можно считать направленным против оси $OZ$ системы координат с началом в центре ловушки ($B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = -B$), кроме того, системой металлических электродов создаётся электрическое поле с потенциалом

$$\varphi(x, y, z) = \frac{U_0}{2r_0^2}(-a(x^2 + y^2) + bz^2),$$

где $U_0$ и $r_0$ — известные постоянные, $a$ и $b$ — неизвестные безразмерные константы, причём $a > 0$. Оказывается, в полях такого вида положительно заряженная частица движется сложным образом. Вдоль оси $OZ$ частица совершает гармонические колебания с некоторой частотой $\Omega_z$ около начала координат. Проекция траектории частицы на плоскость $XOY$ представляет собой *эпитрохоиду*. Это линия, которую описывает точка, движущаяся по окружности радиуса $r$ с постоянной угловой скоростью $\omega^{(+)}$, при том что центр этой окружности движется по окружности бóльшего радиуса $R$ ($R > r$) с меньшей угловой скоростью $\omega^{(-)}$. Здесь и далее имеются в виду угловые скорости относительно лабораторной (!) системы отсчёта. Примеры эпитрохоид, для которых центр большей окружности находится в начале координат, можно видеть на рисунке ниже.

Далее везде речь идёт о движении частицы с известными массой $m$ и положительным зарядом $q$. Параметры $U_0$, $r_0$ и $B$ также считаются известными во всех частях задачи, кроме части С.

А. (4 б.) Получите формулы для проекций $E_x$, $E_y$ и $E_z$ вектора напряжённости электрического поля на оси системы координат и найдите отношение $\dfrac{b}{a}$ безразмерных коэффициентов $b$ и $a$ в выражении

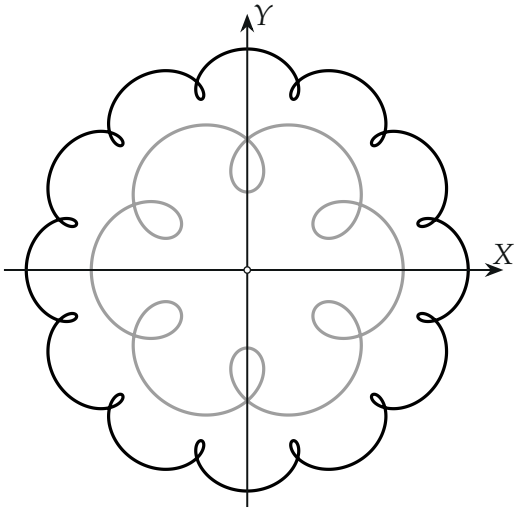
для потенциала электростатического поля.

*Внимание!* Если вы не получили в части A отношение $\frac{b}{a}$, можете приступить к решению части C, считая это отношение известным параметром.

B. (2 б.) Пусть задан коэффициент $b$. Определите частоту колебаний $\Omega_z$, а также циклотронную частоту $\Omega_0$ вращения частицы в магнитном поле при отсутствии электрического.

C. (6 б.) Выразите угловые скорости вращения частицы $\omega^{(+)}$ и $\omega^{(-)}$ по окружностям, дающим траекторию в виде эпитрохоиды, через параметры $\Omega_z$ и $\Omega_0$ ($\sqrt{2}\,\Omega_z < \Omega_0$); $\omega^{(+)}$ — угловая скорость движения по окружности радиусом $r$, $\omega^{(-)}$ — угловая скорость вращения центра этой окружности. Радиусы окружностей $r$ и $R$ неизвестны. На рисунке выше ось $OZ$ направлена на читателя, движение по обеим окружностям происходит в направлении против часовой стрелки.

D. (2 б.) Для траектории в виде бóльшей эпитрохоиды на рисунке выше (линия чёрного цвета), используя результаты предыдущих частей, определите безразмерные коэффициенты $a$ и $b$ в выражении для потенциала электростатического поля.



▲ **Решение. Что происходит.** Квадратичный потенциал в плоскости $XOY$ *выталкивает* частицу от оси, вдоль $OZ$ возвращает к центру; магнитное поле закручивает её вокруг $OZ$. Движения вдоль $OZ$ и в плоскости независимы. Класс задачи — линейные уравнения движения в скрещённых полях: в комплексной координате $w = x + iy$ ищем решения $e^{i\omega t}$, две частоты — две окружности эпитрохоиды.

**Обозначения.** $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ — напряжённость; $\Omega_0 = \dfrac{qB}{m}$; $\Omega_z$ — частота колебаний вдоль $OZ$; $\omega^{(\pm)}$ — частоты в плоскости.

**Часть А.**

**1. Напряжённость.** $E_x = -\partial\varphi/\partial x$ и так далее:

$$E_x = \frac{aU_0}{r_0^2}\,x, \qquad E_y = \frac{aU_0}{r_0^2}\,y, \qquad E_z = -\frac{bU_0}{r_0^2}\,z.$$

При $a > 0$ в плоскости $XOY$ поле направлено от оси (отталкивает положительную частицу), вдоль $OZ$ — к началу.

**2. Отношение $b/a$.** Внутри ловушки зарядов нет, по теореме Гаусса $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{U_0}{r_0^2}\,(a + a - b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = 2.$$

**Часть В.**

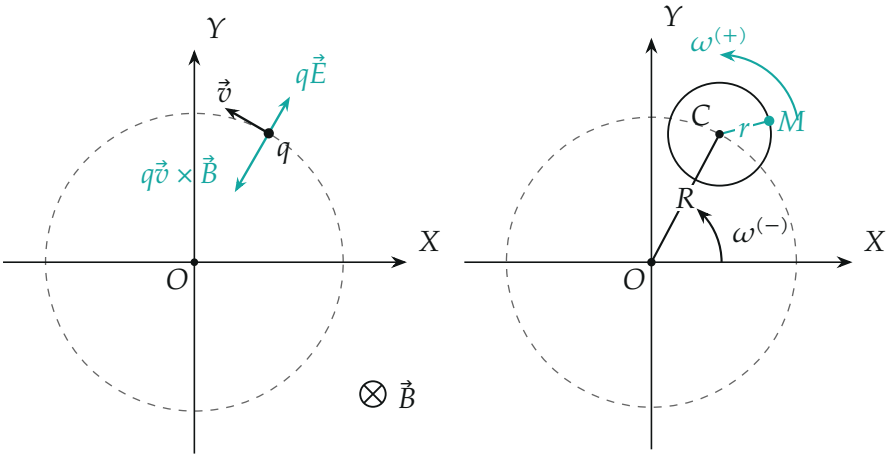
**3. Колебания вдоль $OZ$.** Магнитная сила вдоль $OZ$ не действует (скорость вдоль поля), остаётся электрическая:

$$m\ddot{z} = qE_z = -\frac{qbU_0}{r_0^2}\,z \quad \Rightarrow \quad \Omega_z = \sqrt{\frac{qbU_0}{mr_0^2}}.$$

Без электрического поля сила $qvB$ центростремительная: $\dfrac{mv^2}{\rho} = qvB$, угловая скорость $\Omega_0 = \dfrac{v}{\rho} = \dfrac{qB}{m}$.

**Часть С. 4. Силы в плоскости.** Электрическая сила $q\mathbf{E}$ направлена

от оси. Магнитная сила для $\mathbf{B} = (0, 0, -B)$: $q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\,(-Bv_y,\ Bv_x,\ 0)$. Это скорость, повёрнутая на 90° против часовой стрелки и умноженная на $qB$: при вращении против часовой стрелки сила направлена к центру.




а) силы на частицу б) эпитрохоида

*а) Силы на положительную частицу, $\vec{B}$ направлено от наблюдателя; б) O — центр большой окружности, C — центр малой, M — частица*

**5. Уравнения движения.** Выразим коэффициент электрической силы через $\Omega_z$: из $b = 2a$ получаем $\dfrac{qaU_0}{mr_0^2} = \dfrac{\Omega_z^2}{2}$. Второй закон Ньютона в проекциях на $X$ и $Y$:

$$\ddot{x} = \frac{\Omega_z^2}{2}\,x - \Omega_0\dot{y}, \qquad \ddot{y} = \frac{\Omega_z^2}{2}\,y + \Omega_0\dot{x}.$$

Умножим второе уравнение на $i$ и сложим с первым. Для $w = x + iy$ получим $-\Omega_0\dot{y} + i\Omega_0\dot{x} = i\Omega_0\,(\dot{x} + i\dot{y})$, то есть

$$\ddot{w} = \frac{\Omega_z^2}{2}\,w + i\,\Omega_0\,\dot{w}.$$

**6. Частоты.** Ищем решения $w \propto e^{i\omega t}$: $\dot{w} = i\omega w$, $\ddot{w} = -\omega^2 w$. Под-

ставляем и сокращаем на $w$:

$$-\omega^2 = \frac{\Omega_z^2}{2} - \Omega_0\,\omega \quad \Rightarrow \quad \omega^2 - \Omega_0\,\omega + \frac{\Omega_z^2}{2} = 0,$$

$$\omega^{(\pm)} = \frac{\Omega_0 \pm \sqrt{\Omega_0^2 - 2\Omega_z^2}}{2}.$$

При $\sqrt{2}\,\Omega_z < \Omega_0$ корни вещественны и положительны (сумма $\Omega_0$, произведение $\Omega_z^2/2$): оба вращения против часовой стрелки. Общее решение — сумма двух вращений $w = R\,e^{i\omega^{(-)}t} + r\,e^{i\omega^{(+)}t}$, то есть эпитрохоида (рисунок б выше): центр малой окружности радиуса $r$ обходит большую окружность радиуса $R$ с медленной скоростью $\omega^{(-)}$, а точка бежит по малой со скоростью $\omega^{(+)}$.

Обратите внимание: $\omega^{(\pm)}$ — частоты в лабораторной системе, как и требует условие. При $\Omega_z \ll \Omega_0$ получаем $\omega^{(+)} \approx \Omega_0$ (почти циклотронное вращение) и $\omega^{(-)} \approx \dfrac{\Omega_z^2}{2\Omega_0}$.

**7. Проверка через дрейф.** Медленное движение центра — дрейф $E/B$ на расстоянии $\rho$ от оси $E = \dfrac{aU_0\rho}{r_0^2}$, угловая скорость $\dfrac{aU_0}{r_0^2 B} = \dfrac{\Omega_z^2}{2\Omega_0}$, направление $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ против часовой стрелки — это $\omega^{(-)}$ в пределе. Совпадает.

**Часть D.**

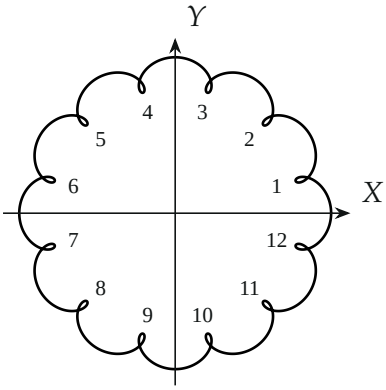
**8. Отношение частот по рисунку.** В системе, вращающейся с $\omega^{(-)}$, частица обходит малую окружность с угловой скоростью $\omega^{(+)} - \omega^{(-)}$ и за оборот центра делает $\omega^{(+)}/\omega^{(-)} - 1$ оборотов — столько петель у кривой. У чёрной эпитрохоиды 12 петель (пронумерованы на рисунке ниже), у серой — 6.

Отсюда $\omega^{(+)}/\omega^{(-)} = 12 + 1 = 13$ (для серой $6 + 1 = 7$). Сумма и произведение частот известны из пункта 6: $\omega^{(+)} + \omega^{(-)} = \Omega_0$, $\omega^{(+)}\omega^{(-)} = \dfrac{\Omega_z^2}{2}$. При отношении 13:

$$\omega^{(-)} = \frac{\Omega_0}{14}, \quad \omega^{(+)} = \frac{13\,\Omega_0}{14}, \quad \frac{\Omega_z^2}{2} = \frac{13}{196}\,\Omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega_z^2 = \frac{13}{98}\,\Omega_0^2.$$

Из пункта 3: $\Omega_z^2 = \dfrac{qbU_0}{mr_0^2}$, $\Omega_0^2 = \dfrac{q^2B^2}{m^2}$, откуда

$$b = \frac{mr_0^2}{qU_0}\,\Omega_z^2 = \frac{13}{98}\cdot\frac{qB^2r_0^2}{mU_0}, \qquad a = \frac{b}{2} = \frac{13}{196}\cdot\frac{qB^2r_0^2}{mU_0}.$$




*Большая эпитрохоида: 12 петель*

**Проверка.** Размерность: $qU_0$ и $mr_0^2\Omega_0^2$ — джоули, $b$ безразмерно. Условие $\sqrt{2}\,\Omega_z < \Omega_0$ выполнено: $2\Omega_z^2 = \frac{13}{49}\Omega_0^2$. Численное решение уравнений движения совпадает с $Re^{i\omega^{(-)}t} + re^{i\omega^{(+)}t}$ с точностью $10^{-9}$, минимумов $|w|$ за период — 12. Серая кривая (отношение 7): $\Omega_z^2 = \frac{7}{32}\Omega_0^2$.

Смысл: электрическое поле слегка отталкивает частицу от оси, магнитное закручивает; движение — быстрое циклотронное вращение плюс медленный дрейф центра.

**Ответ.** A) $E_x = \dfrac{aU_0x}{r_0^2}$, $E_y = \dfrac{aU_0y}{r_0^2}$, $E_z = -\dfrac{bU_0z}{r_0^2}$; $\dfrac{b}{a} = 2$. B) $\Omega_z = \sqrt{\dfrac{qbU_0}{mr_0^2}}$, $\Omega_0 = \dfrac{qB}{m}$. C) $\omega^{(\pm)} = \dfrac{\Omega_0 \pm \sqrt{\Omega_0^2 - 2\Omega_z^2}}{2}$. D) $b = 2a = \dfrac{13}{98}\cdot\dfrac{qB^2r_0^2}{mU_0}$.