Бильярд на льду

Задача 6. [МОШ 2021/22, 11 класс, задача 6] На ровную горизонтальную поверхность ледяного катка положили однородный тонкий обруч радиусом R и массой m. В точку, лежащую на диаметре обруча AB, на неизвестном расстоянии h от центра обруча поместили шайбу массой m и сообщили ей скорость v, направленную перпендикулярно AB. Взаимодействие между шайбой и обручем абсолютно упругое. После столкновения с обручем шайба и обруч движутся так, что в следующий раз шайба попадает в точку B обруча. Радиус шайбы пренебрежимо мал, трения нет, обруч можно считать абсолютно твёрдым телом. Определите расстояние h.

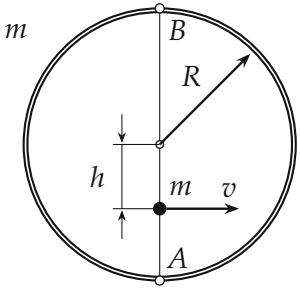


Рис. 1. Рисунок условия: вид сверху.

▲ **Решение. Что происходит.** Шайба и обруч лежат на гладком льду и взаимодействуют только ударом. Нужно, чтобы шайба второй раз ударила обруч именно в точку B, а B не стоит на месте: после удара обруч уезжает вместе со своей точкой B. Считать «куда лететь» удобно в системе отсчёта обруча: в ней B неподвижна, а шайба движется по прямой. Но эта система годится, только если обруч после удара едет равномерно и не вращается. Поэтому порядок такой: выяснить, как обруч получает скорость при ударе (пп. 1–2), перейти в его систему (п. 3) и решить геометрию хорды (п. 4). Задача на упругий удар с силой по нормали и смену системы отсчёта.

Обозначения. O — центр обруча, P — точка первого удара, P_0 — начальное положение шайбы ($OP_0 = h$), φ — угол между скоростью

шайбы $\vec{v}$ и нормалью OP в точке удара, $\vec{n}$ — единичный вектор вдоль OP от центра к точке удара, $\vec{w}$ и $\vec{u}$ — скорости шайбы и обруча после удара.

1. Угол падения. Скорость шайбы перпендикулярна диаметру AB, значит, в прямоугольном треугольнике OP_0P катет $OP_0 = h$, гипотенуза $OP = R$, а угол при вершине P — это угол между траекторией шайбы и радиусом PO, то есть φ (рис. 2):

$$\sin\varphi = \frac{h}{R}.$$

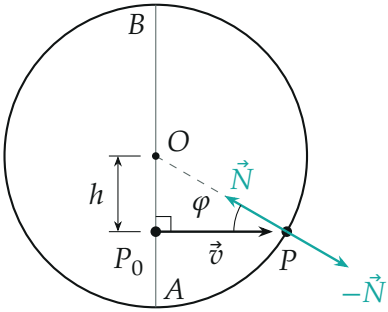


Рис. 2. Момент удара в системе катка. Сила $\vec{N}$ действует на шайбу, равная ей по модулю и противоположная $-\vec{N}$ — на обруч; обе направлены по радиусу OP.

2. Что происходит при ударе. Лёд гладкий, трения нет, поэтому сила удара направлена по нормали к окружности, а нормаль к окружности проходит через её центр. Обруч получает толчок $-\vec{N}$ вдоль радиуса: момент такой силы относительно центра равен нулю, обруч не раскручивается, а едет поступательно вдоль $\vec{n}$. После удара на оба тела по горизонтали ничего не действует, поэтому до следующей встречи они движутся равномерно и прямолинейно — и система отсчёта обруча после удара инерциальна.

Скорости после удара найдём из законов сохранения для системы шайба + обруч за время удара: горизонтальных внешних сил нет — сохраняется импульс; удар упругий — сохраняется кинетическая энергия, и вращательной энергии у обруча нет. Разложим скорость шайбы

на составляющие вдоль нормали и вдоль касательной: $v_n = v\cos\varphi$, $v_\tau = v\sin\varphi$. Касательной силы нет, поэтому касательная составляющая скорости шайбы не меняется: $w_\tau = v_\tau$. Вдоль нормали

$$mv_n = mw_n + mu, \qquad mv_n^2 = mw_n^2 + mu^2.$$

(Касательные составляющие в энергии сократились.) Из первого уравнения $v_n - w_n = u$, из второго $v_n^2 - w_n^2 = u^2$. Делим второе на первое (случай $u = 0$ — удара нет): $v_n + w_n = u$. Сложив с $v_n - w_n = u$, получаем

$$w_n = 0, \qquad u = v_n = v\cos\varphi.$$

Массы равны, и шайба отдаёт обручу всю нормальную составляющую скорости: при равных массах и упругом ударе тела обмениваются скоростями вдоль линии удара. Остаётся

$$\vec{w} = v\sin\varphi \text{ вдоль касательной}, \qquad \vec{u} = v\cos\varphi \text{ вдоль } \vec{n}.$$

Скорости $\vec{w}$ и $\vec{u}$ перпендикулярны, а их сумма равна $\vec{v}$ (рис. 3); энергия сохраняется: $w^2 + u^2 = v^2$.

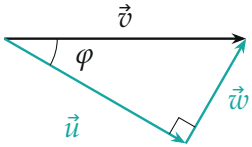


Рис. 3. Скорость $\vec{v}$ раскладывается на $\vec{u}$ (вдоль нормали, уходит к обручу) и $\vec{w}$ (по касательной, остаётся у шайбы): $u = v\cos\varphi$, $w = v\sin\varphi$.

Удар упругий, но $w < v$: часть энергии шайбы уносит поступательно движущийся обруч, поэтому нельзя считать, что шайба «отражается» в лабораторной системе с прежней скоростью.

3. Система отсчёта обруча. Скорость обруча $\vec{u}$ постоянна, поэтому в системе, движущейся со скоростью $\vec{u}$, обруч покоится, а все его точки, в том числе B, неподвижны. До удара обруч покоился, и скорость шайбы в этой системе равна $\vec{v}$. После удара в этой системе

$$\vec{w}_{\text{отн}} = \vec{w} - \vec{u}: \qquad w_{\text{отн},n} = 0 - v\cos\varphi = -v\cos\varphi, \quad w_{\text{отн},\tau} = v\sin\varphi.$$

Нормальная составляющая скорости сменила знак, касательная осталась — это в точности отражение от неподвижной гладкой стенки с $|\vec{w}_{\text{отн}}| = v$. Шайба в системе обруча летит по хорде, образующей с радиусом PO тот же угол φ, что и падающая траектория, только по другую сторону от нормали (угол падения равен углу отражения). (Для упругого удара без касательной силы это верно при любых массах; равенство масс нужно только для значений $\vec{w}$ и $\vec{u}$ в п. 2.)

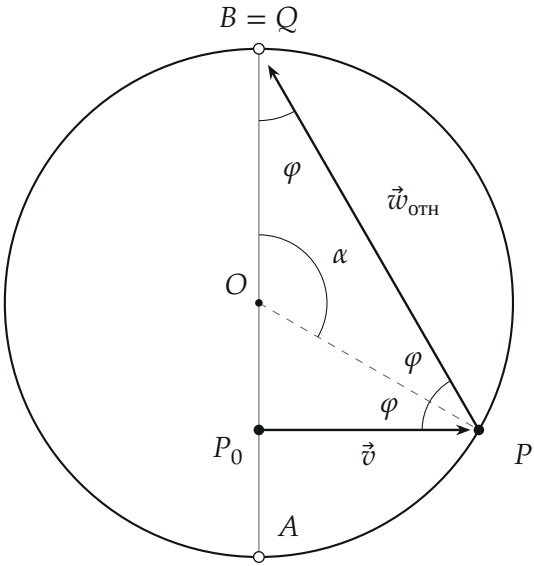


Рис. 4. Система отсчёта обруча: шайба отражается от окружности как от зеркала. Треугольник OPB равнобедренный: углы при P и B равны φ, угол при O равен $\alpha = 180^\circ - 2\varphi$; он же равен $90^\circ + \varphi$.

4. Условие попадания в B. Хорда PB должна дойти до точки B диаметра AB (рис. 5). Горизонтальное расстояние от прямой AB до точки удара $y = P_0P = h\operatorname{ctg}\varphi$ (катет треугольника OP_0P). Продолжение падающей траектории назад (по горизонтали влево) и отражённая хорда лежат по разные стороны от нормали PO и обе образуют с ней угол φ, значит, между собой угол 2φ: хорда поднимается над горизонталью под углом 2φ. Подъём от уровня P_0 до точки B равен $R + h$:

$$y\operatorname{tg}2\varphi = R + h \;\Rightarrow\; \operatorname{ctg}\varphi\operatorname{tg}2\varphi = \frac{R+h}{h}.$$

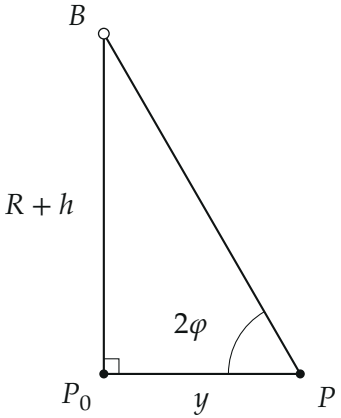


Рис. 5. Треугольник P_0PB в системе обруча: горизонтальный катет $y = P_0P$, вертикальный $R + h$, угол при P равен 2φ.

Преобразуем левую часть: $\operatorname{ctg}\varphi \operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot \dfrac{2\sin\varphi\cos\varphi}{2\cos^2\varphi - 1} = \dfrac{2\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi - 1}$. Переворачиваем равенство:

$$1 - \frac{1}{2\cos^2\varphi} = \frac{h}{R+h} \;\Rightarrow\; \cos^2\varphi = \frac{R+h}{2R}.$$

Подставляем $\cos^2\varphi = 1 - h^2/R^2 = \dfrac{(R-h)(R+h)}{R^2}$ из п. 1 и сокращаем на $R + h$:

$$\frac{R-h}{R} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; h = \frac{R}{2}, \qquad \varphi = 30^\circ.$$

Второй способ — без вычислений. Хорда PB и радиусы OP, OB образуют равнобедренный треугольник с углами при основании φ, значит угол при вершине $\angle POB = 180^\circ - 2\varphi$. С другой стороны, точка P лежит на угловом расстоянии φ ниже горизонтального диаметра (там $\sin\varphi = h/R$), а B — вверху, поэтому $\angle POB = 90^\circ + \varphi$. Приравниваем: $180^\circ - 2\varphi = 90^\circ + \varphi$, откуда $\varphi = 30^\circ$ и $h = R\sin 30^\circ = R/2$ — тот же ответ.

5. Что получилось в лабораторной системе. При $\varphi = 30^\circ$ скорость

шайбы после удара $w = v/2$ и направлена под 60° к начальной, скорость обруча $u = \frac{\sqrt{3}}{2}v$ направлена по $\vec{n}$ (под 30° вниз от начального направления). Хорда PB имеет длину $2R\cos 30° = \sqrt{3}R$, время полёта до второго удара $t = \sqrt{3}R/v$. За это время шайба проходит $\frac{v}{2}t = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, а точка B вместе с обручем смещается на $\frac{\sqrt{3}}{2}v\,t = \frac{3}{2}R$ вдоль $\vec{n}$ (рис. 6).

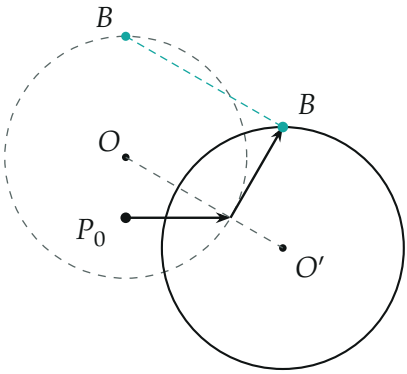


Рис. 6. Лабораторная система: серый пунктир — обруч в начале, сплошной — в момент второго удара. Точка B сместилась (бирюзовый пунктир) ровно туда, куда пришла шайба.

Проверка. Шайба и точка B приходят в одно место. Относительно начального центра O (ось x вдоль $\vec{v}$, ось y вверх): шайба после удара прошла путь $\frac{\sqrt{3}}{2}R(\cos 60°, \sin 60°) = (0{,}433;\ 0{,}750)R$ от $P = (0{,}866;\ -0{,}5)R$, то есть оказалась в точке $(1{,}299;\ 0{,}250)R$. Центр обруча за то же время сместился на $\frac{3}{2}R(\cos 30°, -\sin 30°) = (1{,}299;\ -0{,}750)R$, и точка B, лежащая на R выше центра, оказалась в $(1{,}299;\ 0{,}250)R$. Совпало. Энергия: $\frac{m}{2}(w^2 + u^2) = \frac{mv^2}{2}$.

Смысл: обруч не раскручивается, поэтому в его системе шайба отражается от окружности как свет от зеркала, и динамика сводится к геометрии хорды.

Ответ. $h = \dfrac{R}{2}$.