Треугольники на тетраэдре

Задача 7. [МОШ 2021/22, 11 класс, задача 7] На грани правильного тетраэдра, изготовленного из пенопласта (диэлектрическая проницаемость равна 1), наклеены одинаковые тонкие металлические пластины в форме правильных треугольников, почти совпадающие по размерам с гранями тетраэдра. Электрического контакта между пластинами нет. Заряд любой пластины изначально равен нулю. Если одной пластине сообщить заряд Q, то её потенциал будет равен $\dfrac{Q}{C_0}$. Если теперь заземлить любую незаряженную пластину, то потенциал заряженной окажется равен $\dfrac{Q}{C_1}$. Найдите разность потенциалов двух пластин, если на одну из них нанесён заряд Q, а заряд второй равен $-Q$, при условии, что другие две пластины не заряжены. Чему равна ёмкость конденсатора, одной обкладкой которого является любая пластина тетраэдра, а другой — три оставшиеся пластины, соединённые друг с другом идеальным проводником?

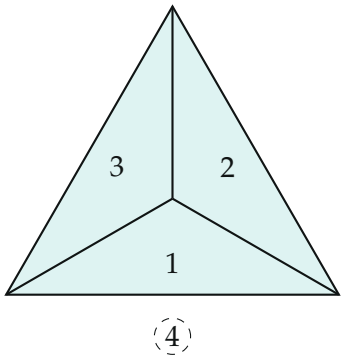


Рис. 1. Поясняющий рисунок: тетраэдр сверху. Пластины 1, 2, 3 лежат на боковых гранях, пластина 4 — на основании под ними. Каждая пара пластин имеет общее ребро, поэтому любые две пластины расположены одинаково.

▲ **Решение. Что происходит.** Четыре металлические пластины — четыре проводника, потенциал каждого зависит не только от его заряда: заряды соседей тоже создают на нём потенциал (и поляризуют его, но

это уже учтено в коэффициентах ниже). Электростатика линейна, поэтому потенциал пластины — сумма вкладов от зарядов всех четырёх, и каждый вклад пропорционален своему заряду. Коэффициенты пропорциональности определяются только геометрией. У правильного тетраэдра геометрия одна для всех: любую грань можно перевести в любую другую поворотом, а любую пару граней — в любую другую пару (каждые две грани имеют общее ребро). Поэтому остаются два числа: «собственный» коэффициент (как заряд пластины создаёт потенциал на ней самой) и «взаимный» (как заряд одной пластины создаёт потенциал на другой). Два условия задачи эти числа находят, а дальше — подстановка зарядов. Метод: линейная связь потенциалов и зарядов.

Обозначения. q_i и φ_i — заряд и потенциал пластины i ($i = 1, \dots, 4$). Потенциал на бесконечности равен нулю, вне пластин других зарядов нет.

1. Линейная связь потенциалов и зарядов. Потенциал пластины i складывается из собственного (от заряда q_i, который лежит на ней самой) и внешнего (от зарядов остальных пластин). Оба пропорциональны зарядам (принцип суперпозиции: уравнения поля линейны, а положения проводников не меняются). Для $i = j$ коэффициент обозначим a («собственный»), для $i \neq j$ — b («взаимный»); по симметрии он один для всех пар:

$$\varphi_i = a\,q_i + b\sum_{j\neq i} q_j.$$

Положительный заряд создаёт положительный потенциал везде, поэтому $a > 0$, $b > 0$. Почему здесь только полные заряды пластин, а не то, как заряд распределён по каждой из них: пластина — проводник, её потенциал везде одинаков, и поле вне пластин однозначно определяется полными зарядами четырёх проводников. Поэтому у незаряженной пластины $q = 0$ и её вклад в сумму равен нулю, хотя на ней могут быть наведены разноимённые заряды: их влияние уже учтено в a и b.

2. Первое условие: a. Заряд Q только на пластине 1: $q_1 = Q$, остальные нули. Тогда в сумме остаётся один член, $\varphi_1 = aQ$, а по условию

$\varphi_1 = Q/C_0$:

$$a = \frac{1}{C_0}.$$

3. Второе условие: *b*. Заземляем пластину 2. Заземление задаёт потенциал пластины, а не её заряд: $\varphi_2 = 0$ (рис. 2, состояние (а)). Заряд q_2 на ней теперь появляется сам: он стекает с земли, чтобы потенциал стал нулевым. Пластины 3 и 4 остались изолированными и незаряженными: $q_3 = q_4 = 0$; заряд пластины 1 прежний, $q_1 = Q$. Запишем потенциалы:

$$\varphi_2 = a\,q_2 + bQ = 0 \;\Rightarrow\; q_2 = -\frac{b}{a}Q,$$
$$\varphi_1 = aQ + b\,q_2 = \Big(a - \frac{b^2}{a}\Big)Q = \frac{Q}{C_1}.$$

Потенциал заряженной пластины изменился именно из-за наведённого заряда q_2 на заземлённой: он противоположен по знаку и понижает φ_1. Отсюда

$$b^2 = a\Big(a - \frac{1}{C_1}\Big) = \frac{1}{C_0}\Big(\frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1}\Big) \;\Rightarrow\; b = \frac{1}{C_0}\sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}},$$

корень берём положительный, потому что $b > 0$. Заметим, что $C_1 \geqslant C_0$: заземлённая пластина притягивает отрицательный заряд и понижает потенциал заряженной.

4. Разность потенциалов при зарядах $+Q$ и $-Q$. Пусть $q_1 = Q$, $q_2 = -Q$, $q_3 = q_4 = 0$ (рис. 2, состояние (б)). Пластины 3 и 4 заряда не имеют и в суммах не участвуют:

$$\varphi_1 = aQ + b(-Q) = (a-b)Q, \qquad \varphi_2 = a(-Q) + bQ = -(a-b)Q.$$

Разность

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2(a-b)Q = \frac{2Q}{C_0}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}}\right).$$

Знак положителен: $b < a$, потому что $b^2 = a(a - 1/C_1) < a^2$.

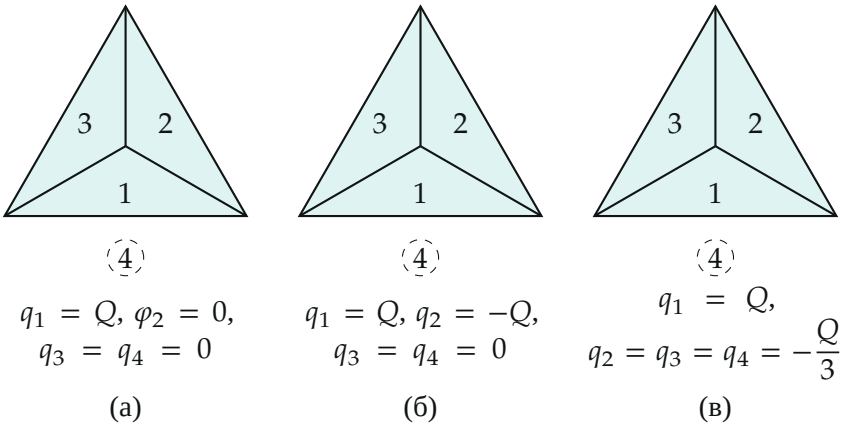


Рис. 2. Три состояния системы (вид сверху); под каждым — заряды и потенциалы пластин. (а) заряжена пластина 1, пластина 2 заземлена, её заряд наводится сам. (б) заряды $+Q$ и $-Q$. (в) пластина 1 и три соединённые: заряды $-Q/3$ у каждой из трёх одинаковы по симметрии.

5. Ёмкость конденсатора «одна пластина — три остальные». Три пластины соединены проводником: у них общий потенциал, а суммарный заряд $-Q$ (пластина 1 имеет Q). Эти три пластины равноправны (перестановка пластин 2, 3, 4 переводит систему в себя), а поле единственно, поэтому заряды у них равны: $q_2 = q_3 = q_4 = -Q/3$ (рис. 2, состояние (в)). Потенциалы:

$$\varphi_1 = aQ + b(-Q) = (a - b)Q,$$
$$\varphi_2 = a\Big(-\frac{Q}{3}\Big) + b\Big(Q - \frac{Q}{3} - \frac{Q}{3}\Big) = -\frac{(a - b)Q}{3}.$$

Напряжение между обкладками $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{4}{3}(a - b)Q$, ёмкость

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{3}{4(a - b)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{C_0}{1 - \sqrt{1 - C_0/C_1}}.$$

6. Второй способ для ёмкости (рис. 2). Состояние (в) есть сумма трёх состояний: в состоянии с номером k ($k = 2, 3, 4$) на пластине 1 заряд

$+Q/3$, на пластине k заряд $-Q/3$, остальные две пластины не заряжены. Каждое из них — состояние (б), уменьшенное втрое: потенциалы пластин 1 и k равны $\pm\frac{1}{3}(a-b)Q$, а у остальных двух нуль (заряды $\pm Q/3$ влияют на них одинаково и сокращаются). Складываем потенциалы по принципу суперпозиции: у пластины 1 сумма трёх одинаковых вкладов $3\cdot(\frac{1}{3}(a-b)Q) = (a-b)Q$, у пластины 2 только вклад своего состояния, $-\frac{1}{3}(a-b)Q$. Получили те же потенциалы, что в п. 5. Заодно видно, что $C = \frac{3}{2}C_2$, где $C_2 = Q/\Delta\varphi = \dfrac{C_0}{2(1-b/a)}$ — «ёмкость пары» из п. 4.

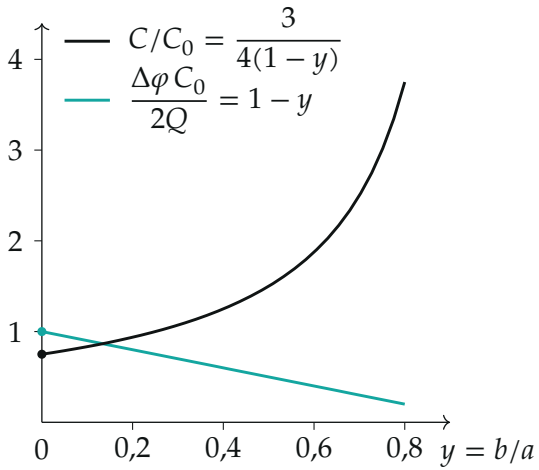


Рис. 3. Результаты как функции $y = b/a = \sqrt{1-C_0/C_1}$ (насколько сильно пластины влияют друг на друга): разность потенциалов в единицах $2Q/C_0$ падает, ёмкость C в единицах C_0 растёт.

Проверка. Размерность: C_0, C_1 — ёмкости, под корнем безразмерное отношение, $\Delta\varphi \sim Q/C$, $C \sim C_0$. Два предельных случая (рис. 3):

- $b \to 0$, то есть $C_1 \to C_0$ ($y = 0$): пластины не влияют друг на друга, и $\Delta\varphi = 2Q/C_0$ — у каждой пластины потенциал $\pm Q/C_0$, как у отдельной. Ёмкость $C = \frac{3}{4}C_0$ — последовательное соединение C_0 и $3C_0$: $\dfrac{C_0\cdot 3C_0}{C_0+3C_0}$.

- $b \to a$, то есть $C_1 \to \infty$ ($y \to 1$): пластины почти сливаются в один проводник; $\Delta\varphi \to 0$ и $C \to \infty$, как и должно быть при почти одинаковых потенциалах.

Чем сильнее пластины влияют друг на друга (b ближе к a), тем меньше разность потенциалов при тех же зарядах и тем больше ёмкость.

Ответ. $\Delta\varphi = \dfrac{2Q}{C_0}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{C_0}{C_1}}\right)$; $\quad C = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{C_0}{1 - \sqrt{1 - C_0/C_1}}$.