В сосуде

Задача 8. [МОШ 2021/22, 11 класс, задача 8] В невесомости в высоком цилиндрическом сосуде с площадью основания 0,05 м^2 находится вода массой m в жидком состоянии и влажный воздух, давление которого в любой точке сосуда равно внешнему давлению $p_0 = 10^5$ Па, а температура равна температуре воды и равна $t = 65\,^\circ$C. Сосуд открыт сверху, поэтому относительная влажность воздуха в сосуде вследствие диффузии меняется линейно в зависимости от расстояния x до его дна, покрытого водой. Можно считать, что вблизи дна влажность равна 100 %, а на расстоянии $H = 1$ м от дна она уменьшается до 20 %. График зависимости плотности насыщенных паров воды от температуры показан на приведённом ниже рисунке.

Молярные массы сухого воздуха и воды равны 29 г/моль и 18 г/моль соответственно. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

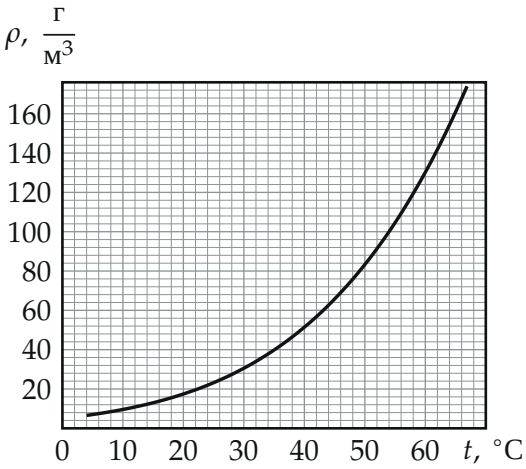


Рис. 1. Рисунок условия: плотность насыщенного пара воды ρ в зависимости от температуры.

А. (4 балла) Пусть в начальный момент масса воды в жидком состоянии равна $m_1 = 32$ г. Сосуд герметизируют, устанавливая специальную тонкую жёсткую задвижку на высоте $H = 1$ м. После

этого температуру в сосуде медленно увеличивают до 100 °C. Найдите давление в сосуде в конечном состоянии.

В. (5 баллов) В этом случае начальная масса жидкости в сосуде равна $m_2 = 1{,}2$ г. На расстоянии H от дна сосуда устанавливают поршень, который может скользить без трения вдоль оси сосуда. После этого температуру в сосуде начинают медленно уменьшать. Найдите расстояние от дна сосуда до поршня при температуре 60 °C и 10 °C.

▲ **Решение. Что происходит.** В сосуде смесь сухого воздуха и водяного пара при одной температуре, внизу вода. Снаружи давление p_0 и сосуд открыт, поэтому давление смеси в любой точке равно p_0 (закон Дальтона: $p_\text{п} + p_\text{в} = p_0$), но состав вдоль сосуда разный: у воды пара больше, вверху меньше. Влажность линейна по высоте, потому что водяной пар поднимается вверх за счёт диффузии. Сначала узнаём, сколько пара, воды и воздуха в сосуде: задвижка и поршень этого не меняют. Дальше в обеих частях вопрос один — осталась ли на дне вода, то есть насыщен ли пар. Общий приём: предположить, что вода осталась, и проверить, не нужно ли для этого пара больше, чем всего воды (рис. 2).



Рис. 2. Проверка насыщения: одно из двух предположений всегда верно.

Почему это работает: если на дне осталась хоть капля, пар над ней насыщен, и его ровно $\nu' = p_\text{н}V/(RT)$; но пара не может быть больше,

чем воды всего. Не хватает воды на насыщение — значит, она вся испарилась, и давление пара автоматически ниже насыщенного.

Обозначения. $\mu_п = 18$ г/моль — молярная масса воды, $S = 0{,}05$ м^2, T — температура в кельвинах, $\rho_н(T)$ и $p_н = \rho_н RT/\mu_п$ — плотность и давление насыщенного пара, $\varphi(x)$ — относительная влажность, $\nu_п$, $\nu_ж$, $\nu_в$ — число молей пара, воды в жидкости и сухого воздуха.

1. Профиль влажности. Влажность линейна, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(H) = 0{,}2$, значит $\varphi(x) = 1 - 0{,}8\,x/H$ (рис. 3). Температура одинакова по всему сосуду, поэтому давление насыщенного пара $p_н$ от высоты не зависит, и давление пара на высоте x равно $p_п(x) = \varphi(x)\,p_н$.

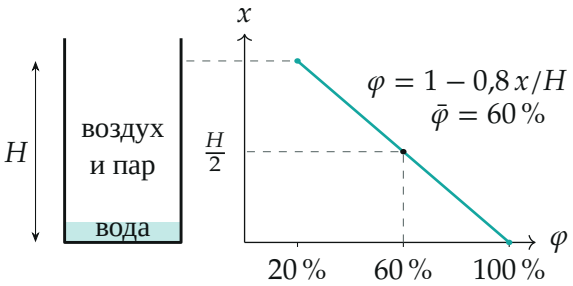


Рис. 3. Сосуд и профиль влажности; среднее значение 60 % достигается на высоте $H/2$.

2. Сколько пара, воды и воздуха. Выделим слой толщиной dx: на такой толщине влажность не меняется, и для пара в слое $p_п S\,dx = d\nu_п RT$, то есть $d\nu_п = \dfrac{\varphi p_н S}{RT}\,dx$. Складываем слои от дна до H: интеграл линейной функции равен длине интервала, умноженной на среднее значение, а среднее влажности — полусумма краёв, $\bar\varphi = \frac{1+0{,}2}{2} = 0{,}6$. По графику (рис. 1) при 65 °C плотность насыщенного пара $\rho_н = 161$ г/м^3, и

$$\nu_п = \frac{p_н SH\bar\varphi}{RT} = \frac{\rho_н SH\bar\varphi}{\mu_п} = \frac{0{,}161 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}6}{0{,}018} \approx 0{,}268 \text{ моль}$$

Воздуха: в слое оба газа создают суммарное давление p_0, поэтому

$p_0 S\,dx = (d\nu_\text{п} + d\nu_\text{в})RT$. Суммируем слои:

$$\nu_\text{п} + \nu_\text{в} = \frac{p_0 SH}{RT} = \frac{10^5 \cdot 0{,}05}{8{,}3 \cdot 338} \approx 1{,}782 \text{ моль} \;\Rightarrow\; \nu_\text{в} \approx 1{,}51 \text{ моль}.$$

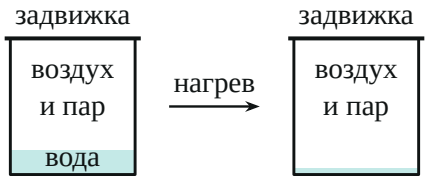
Обратите внимание: считать воздух по уравнению состояния сразу для всего сосуда с давлением p_0 нельзя — давление воздуха вдоль сосуда разное (внизу его меньше, где много пара), и такая ошибка составит почти 18 %.

Пункт А. Нагревание в закрытом объёме.

3. Что получится при 100 °C. Задвижка отсекает объём $V = SH = 0{,}05$ м^3 (рис. 4), жидкой воды $\nu_\text{ж} = m_1/\mu_\text{п} = 32/18 \approx 1{,}78$ моль, всего воды $\nu_\Sigma = \nu_\text{п} + \nu_\text{ж} \approx 0{,}268 + 1{,}78 = 2{,}05$ моль. Предположим, что при $T_2 = 373$ K вода осталась, тогда $p_\text{п} = p_\text{н}(100\,^\circ\text{C}) = p_0 = 10^5$ Па (вода кипит при 100 °C при нормальном давлении, значит, насыщенный пар при этой температуре имеет давление p_0). Пара в объёме

$$\nu' = \frac{p_0 V}{RT_2} = \frac{10^5 \cdot 0{,}05}{8{,}3 \cdot 373} \approx 1{,}61 \text{ моль} < \nu_\Sigma = 2{,}05 \text{ моль}.$$

Воды хватает, предположение верно: пар насыщен, около 8 г воды осталось жидкой.



$T_1 = 338$ K
вода 32 г, пар 4,8 г, воздух 43,9 г

$T_2 = 373$ K
пар насыщен (29 г), жидкости ≈ 8 г

Рис. 4. Пункт А: объём постоянен, пар насыщается.

4. Давление воздуха и полное давление. Воздух — газ в закрытом

объёме, количество его не изменилось:

$$p_в = \frac{\nu_в R T_2}{V} = \frac{1{,}51 \cdot 8{,}3 \cdot 373}{0{,}05}\,\text{Па} \approx 93{,}7\,\text{кПа}, \qquad p = p_в + p_п \approx 194\,\text{кПа}.$$

Пункт В. Охлаждение при постоянном давлении.

5. Что остаётся и что меняется. Пар и воздух те же ($\nu_п = 0{,}268$ моль, $\nu_в = 1{,}51$ моль), изменилась вода: $\nu_ж = m_2/\mu_п = 1{,}2/18 \approx 0{,}067$ моль, всего воды $\nu_\Sigma = 0{,}335$ моль. Поршень свободный, над ним атмосфера: в невесомости на поршень действуют только давление газа снизу и атмосфера сверху, поэтому второй закон Ньютона даёт $pS = p_0 S$, давление под поршнем всё время равно p_0. Значит, $p_п + p_в = p_0$, а объём меняется.

6. 60 °C. Предположим, что вода осталась: $p_п = p_н$. По графику $\rho_н(60\,^\circ\text{C}) = 130$ г/м^3: $p_н(333\text{ K}) = \rho_н RT/\mu_п \approx 20{,}0$ кПа. Парциальные давления относятся как числа молей, $p_п/p_0 = \nu'/(\nu' + \nu_в)$, откуда

$$\nu' = \nu_в \frac{p_н}{p_0 - p_н} = 1{,}51 \cdot \frac{20{,}0}{80{,}0} \approx 0{,}378\text{ моль} > \nu_\Sigma = 0{,}335\text{ моль}.$$

Чтобы насытить пар, нужно больше воды, чем есть, значит, предположение неверно: вся вода — пар, $\nu_п = \nu_\Sigma$ (рис. 2). Проверим: $p_п = p_0 \dfrac{\nu_\Sigma}{\nu_\Sigma + \nu_в} = \dfrac{0{,}335}{1{,}85} \cdot 100 \approx 18{,}1$ кПа $< p_н = 20{,}0$ кПа — пар ненасыщен, как и должно быть. Объём из уравнения состояния смеси при давлении p_0:

$$V = \frac{(\nu_в + \nu_\Sigma)RT}{p_0} = \frac{1{,}85 \cdot 8{,}3 \cdot 333}{10^5} \approx 0{,}0511\,\text{м}^3, \qquad H_1 = \frac{V}{S} \approx 1{,}02\,\text{м}.$$

7. Точка росы. Конденсация начнётся, когда $p_н(T)$ снизится до 18,1 кПа. Это плотность насыщенного пара около 118 г/м^3, то есть по графику около 58 °C. Выше неё $V \propto T$, ниже пар насыщен (рис. 6).

8. 10 °C. По графику $\rho_н(10\,^\circ\text{C}) = 9{,}6$ г/м^3: $p_н = \rho_н RT/\mu_п \approx 1{,}25$ кПа — это около 1,3 % от p_0. Даже если бы вся вода (0,335 моль) оставалась паром, давление пара было бы около 18 кПа — намного больше 1,25 кПа, значит, часть воды сконденсировалась, пар насыщен, $p_п = p_н$

(предположение верно). Весь остальной газ — воздух: $p_в = p_0 - p_н = 98{,}7$ кПа, и он занимает весь объём под поршнем:

$$V = \frac{\nu_в RT}{p_0 - p_н} = \frac{1{,}51 \cdot 8{,}3 \cdot 283}{98\,700}\ \text{м}^3 \approx 0{,}0360\ \text{м}^3, \qquad H_2 = \frac{V}{S} \approx 0{,}72\ \text{м}.$$

Паром остаётся $\rho_н V \approx 0{,}35$ г, остальное $\approx 5{,}7$ г в жидкости ($0{,}35 < 6{,}03$ г). Обратите внимание: у насыщенного пара давление не зависит от объёма, поэтому поршню «достаётся» только давление воздуха $p_0 - p_н$; именно оно определяет объём ниже точки росы.

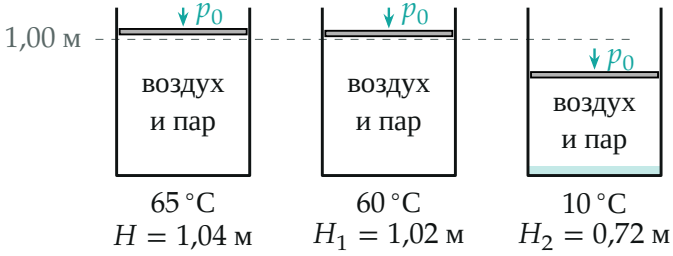


Рис. 5. Пункт В: положения поршня при трёх температурах в масштабе; пунктир — начальная высота $H = 1$ м. На 10 °C часть воды в виде жидкости.

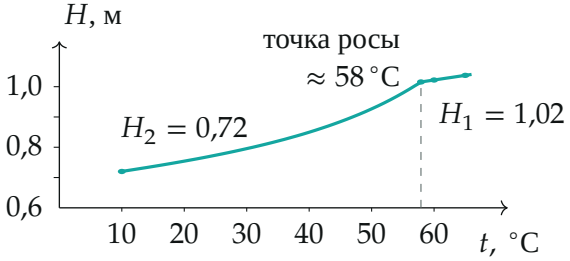


Рис. 6. Высота поршня от температуры: до 58 °C — $V \propto T$, ниже — излом: объём задаёт давление воздуха $p_0 - p_н(T)$.

Проверка. $p_н(65\,°\text{C}) = 25$ кПа — известное значение для воды. Пункт А вторым способом: воздух нагревается при постоянном объёме, $p_в = (p_0 - \bar{\varphi} p_н)T_2/T_1 = 84{,}9 \cdot 373/338 \approx 93{,}7$ кПа — то же.

Ответ. А) $p \approx 194$ кПа (допустимо 193 ± 8 кПа); В) $H_1 \approx 1{,}02$ м при 60 °C, $H_2 \approx 0{,}72$ м при 10 °C.