Через шар

Задача 9. [МОШ 2021/22, 11 класс, задача 9] В этой задаче предлагается проанализировать изображения плоских предметов в прозрачном шаре радиусом R, изготовленном из стекла с показателем преломления $n = \frac{3}{2}$. Во всех частях задачи можно считать линию зрения перпендикулярной плоскости предмета, а центр шара — лежащим на линии зрения, как показано на схематичном рисунке ниже. Предлагается рассматривать только те изображения, которые формируются параксиальными (приосевыми) лучами.

Линейным увеличением β назовём отношение перпендикулярного линии зрения размера изображения h' к соответствующему размеру предмета h.

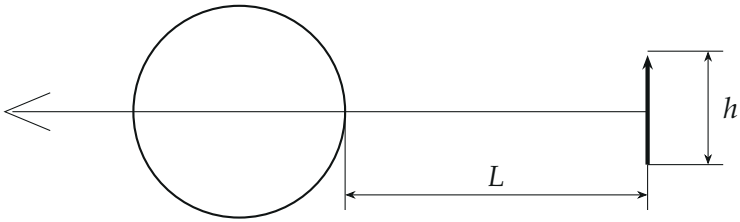
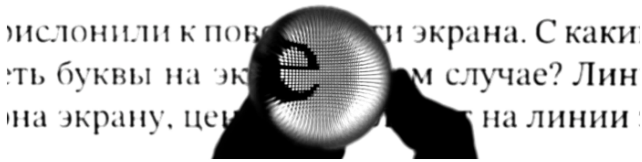


Рис. 1. Рисунок условия.

A. (4 балла) В шаре наблюдают изображение удалённого предмета размером h. Расстояние от шара до предмета равно L: $L \gg R$, $L \gg h$ (см. рисунок выше). Определите зависимость $\beta(L)$.

B. (6 баллов) Шар прислонили к поверхности экрана компьютерного монитора. С каким увеличением β можно видеть буквы (и отдельные пиксели) на экране в этом случае?



C. (4 балла) На приведённом выше фрагменте фотографии экрана компьютерного монитора, к которому прижат стеклянный шар, наблюдается увеличенное в шаре изображение пикселей.

Пусть шар радиусом $R = 2$ см прижали к экрану монитора и сфотографировали с расстояния $S = 1$ м, при этом центр шара находился вблизи оптической оси объектива, перпендикулярной плоскости экрана. Разрешение монитора составляло 2560×1440 пикселей, а длина диагонали экрана — 32 дюйма. Размеры светочувствительной матрицы фотоаппарата были равны $23{,}5 \times 15{,}6$ мм. Оказалось, что изображение в шаре горизонтального отрезка экрана из 20 пикселей занимает на фотографии чуть больше 100 точек при размере длинной стороны фотографии 3000 точек. Определите по этим данным фокусное расстояние F объектива фотоаппарата. Учтите, что $F \ll S$, 1 дюйм $\approx 2{,}54$ см.

▲ **Решение. Что происходит.** Шар — это две сферические преломляющие поверхности подряд: свет входит в стекло через первую, выходит через вторую. Изображение, построенное первой поверхностью, служит предметом для второй, а общее увеличение равно произведению увеличений двух поверхностей. Для параксиальных лучей каждая поверхность подчиняется формуле преломления на сфере, и ничего, кроме неё, не нужно. Часть C — пересчёт размеров по подобным треугольникам с уже найденным увеличением.

Обозначения. O_1 — вершина шара, в которой свет входит, O_2 — вершина, из которой выходит ($O_1O_2 = 2R$), C — центр шара. Для поверхности с радиусом r между средами $n_1 \to n_2$ (s — расстояние от вершины до предмета, s' — до изображения; оба отсчитываются вдоль света, мнимому предмету или изображению соответствует знак минус; $r > 0$, если центр кривизны за поверхностью)

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r}, \qquad \beta_{\text{пов}} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s}.$$

Пункт A. Удалённый предмет.

1. Первая поверхность ($1 \to n, r = +R, s = L \gg R$). Член $1/L$ малый,

им пренебрегаем (так сказано в условии):

$$\frac{n}{s_1'} = \frac{n-1}{R} - \frac{1}{L} \approx \frac{n-1}{R} \;\Rightarrow\; s_1' = \frac{nR}{n-1} = 3R, \qquad \beta_1 = -\frac{s_1'}{nL} = -\frac{2R}{L}.$$

Промежуточное изображение лежит на $3R$ от O_1, то есть на R *за* задней вершиной O_2.

2. Вторая поверхность ($n \to 1$, центр кривизны со стороны света, $r = -R$). Промежуточное изображение лежит за поверхностью, значит для неё это мнимый предмет: $s_2 = 2R - 3R = -R$. Тогда

$$\frac{n}{-R} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1-n}{-R} = \frac{n-1}{R} \;\Rightarrow\; \frac{1}{s_2'} = \frac{n-1+n}{R} = \frac{2}{R}, \qquad s_2' = \frac{R}{2},$$

$$\beta_2 = -\frac{ns_2'}{1 \cdot s_2} = -\frac{(3/2)(R/2)}{-R} = \frac{3}{4}.$$

Изображение действительное, оно лежит на $R/2$ за O_2 (рис. 2).

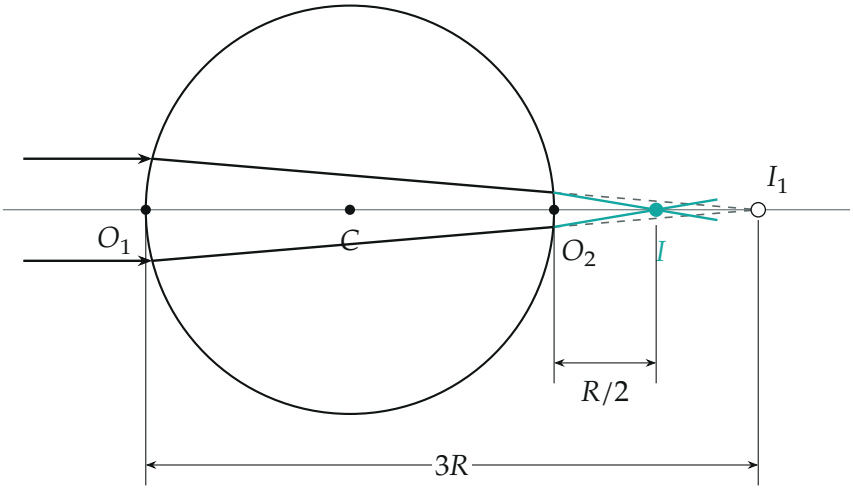


Рис. 2. Параллельный пучок: после первой поверхности лучи шли бы в I_1 (на $3R$ от O_1), вторая поверхность собирает их в I на $R/2$ за O_2.

3. Итог. $\beta = \beta_1\beta_2 = -\frac{2R}{L} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3R}{2L}$. Знак минус — изображение

перевёрнутое; по размеру

$$|\beta| = \frac{3R}{2L}.$$

Второй способ: луч через центр C нормален к обеим поверхностям и не преломляется, на нём лежит вершина изображения. Расстояние от центра до предмета $L+R \approx L$, до изображения $R+R/2 = \frac{3}{2}R$; отношение $\frac{3R/2}{L}$ совпало.

Пункт В. Шар на экране.

4. Первая поверхность. Предмет лежит на вершине O_1: $s \to 0$. Из формулы при малом s получаем $n/s_1' \approx -1/s$, то есть $s_1' = -ns$, и $\beta_1 = -\dfrac{1 \cdot s_1'}{n\,s} = +1$. Малый кусок сферы у вершины — почти плоская граница, а предмет лежит прямо на ней: изображение на том же месте и того же размера.

5. Вторая поверхность. Теперь предмет стоит в $2R$ перед O_2: $s_2 = 2R$.

$$\frac{n}{2R} + \frac{1}{s_2'} = \frac{n-1}{R} \;\Rightarrow\; \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4R}, \qquad s_2' = -4R,$$

$$\beta = \beta_1\beta_2 = 1 \cdot \left(-\frac{n\,s_2'}{s_2}\right) = -\frac{(3/2)(-4R)}{2R} = 3.$$

Изображение мнимое, прямое, лежит на $4R$ перед O_2, то есть на $2R$ *за* плоскостью экрана (рис. 3).

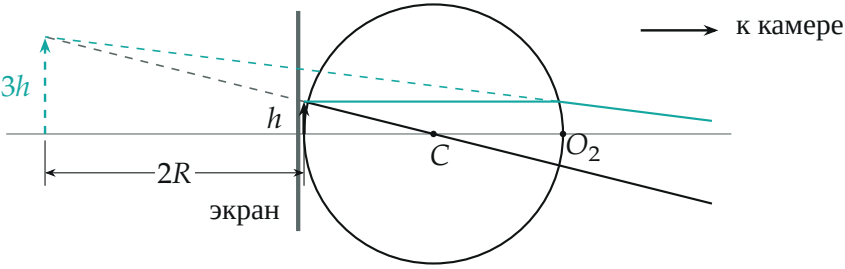


Рис. 3. Предмет высотой h на экране и его мнимое изображение высотой $3h$ на $2R$ за экраном. Чёрный луч идёт через центр, бирюзовый — параллельно

оси от вершины предмета и преломляется на второй поверхности; штрих — продолжения назад (высоты на рисунке увеличены).

Ответ на В получаем и вторым способом: расстояние от центра до предмета R, до изображения $4R - R = 3R$, по ту же сторону от центра, поэтому изображение прямое и $\beta = 3R/R = 3$.

Пункт С. Фокусное расстояние.

6. Размер на экране и в шаре. Диагональ монитора $32 \cdot 25{,}4 = 812{,}8$ мм содержит $\sqrt{2560^2 + 1440^2} \approx 2937$ пикселя, шаг $p = 812{,}8/2937 \approx 0{,}277$ мм. Двадцать пикселей занимают $20p \approx 5{,}53$ мм. В шаре они видны увеличенными втрое (п. 5): размер мнимого изображения $a = 3 \cdot 20p \approx 16{,}6$ мм.

7. Фотография. Фотоаппарат видит мнимое изображение, которое лежит на $2R$ за экраном; от объектива до него $d = S + 2R \approx 1{,}04$ м. Так как $F \ll d$, действительное изображение лежит почти в фокальной плоскости, на расстоянии F от объектива, и по подобию треугольников через центр объектива (рис. 4) $y/a = F/d$. Одна точка матрицы $23{,}5/3000 \approx 7{,}83$ мкм, поэтому 100 точек дают $y \approx 0{,}783$ мм:

$$F = \frac{y\,d}{a} = \frac{0{,}783 \cdot 1040}{16{,}6}\ \text{мм} \approx 49\ \text{мм}.$$

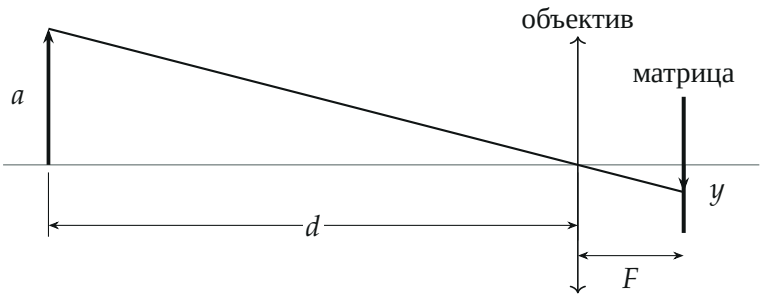


Рис. 4. Мнимое изображение a (на d перед объективом) и его изображение y на матрице; луч через центр объектива.

Обратите внимание: если не учесть увеличение шаром ($\beta = 3$), получится $F \approx 147$ мм — втрое больше верного. «Чуть больше 100 точек»

даёт запас до ≈ 50 мм; если считать расстояние от камеры просто S, получится 47 мм — в пределах точности данных.

Проверка. Шар как толстая линза: плоскости главных точек в центре, фокусное расстояние от центра

$$f = \frac{nR}{2(n-1)} = \frac{3}{2}R, \qquad \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f},$$

где d_0 и d' — расстояния от центра до предмета и до изображения. В пункте A $d_0 \approx L$, $d' = \frac{3}{2}R$, как выше. В пункте B $d_0 = R$:

$$\frac{1}{d'} = \frac{2}{3R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{3R}, \qquad d' = -3R, \qquad |\beta| = \frac{3R}{R} = 3$$

Сходится. Предел $L \to \infty$: $\beta \to 0$, изображение в фокальной плоскости.

Ответ. A) $|\beta| = \dfrac{3R}{2L}$ (изображение перевёрнутое, $\beta = -\dfrac{3R}{2L}$); B) $\beta = 3$ (прямое); C) $F \approx 49$ мм.