Аналогии

Задача 10. [МОШ 2021/22, 11 класс, задача 10]

А. (7 баллов) В вакууме, в области, где нет зарядов и токов, электрическое и магнитное поля описываются одинаковыми с математической точки зрения дифференциальными уравнениями (с точностью до знаков и постоянных множителей), поэтому картины линий этих полей вдали от источников очень похожи. Например, напряжённость поля точечного электрического диполя ($\vec{p} = q\vec{l}$ — дипольный момент) в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ даётся формулой

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\,(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right),$$

которая превращается в формулу для индукции магнитного поля витка с током (магнитного диполя) при замене: $\vec{E} \to \vec{B}$, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to \frac{\mu_0}{4\pi}$, $\vec{p} \to \vec{\mu}$; $\vec{\mu} = IS\vec{n}$ — магнитный момент витка площадью S с током I, $\vec{n}$ — вектор единичной нормали к плоскости витка.

Рассмотрим соленоид с количеством витков N ($N \gg 1$) длиной L, намотанный достаточно тонким проводом виток к витку на полый цилиндрический немагнитный сердечник с радиусом основания R ($R \ll L$). По виткам соленоида течёт ток I.

А1) (2 балла) На большом расстоянии от витков соленоида его поле эквивалентно полю двух фиктивных магнитных зарядов, расположенных на торцах соленоида. Найдите модуль магнитного заряда Q_M любого из торцов соленоида.

А2) (3 балла) Чему равна индукция магнитного поля соленоида в точке A (см. рисунок) на расстоянии b ($b \gg R$, $b \ll L$) от его оси?

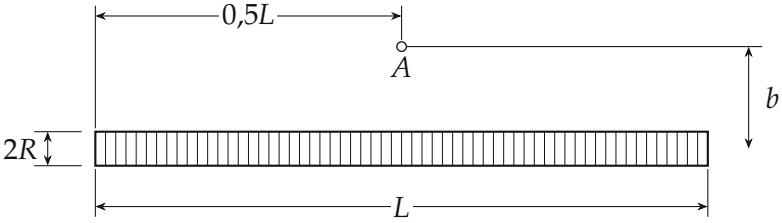


Рис. 1. Рисунок условия.

А3) (2 балла) Найдите индукцию магнитного поля соленоида в точке, лежащей вне соленоида на его оси на расстоянии h ($R \ll h \ll L$) от его торца.

В. (7 баллов) Аналогию можно развить, обратив внимание на то, что напряжённость вихревого электрического поля, порождаемого изменяющимся магнитным полем бесконечного соленоида, на расстоянии, много большем радиуса соленоида, описывается соотношением, очень похожим на формулу $B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ для индукции магнитного поля прямолинейного провода с током I на расстоянии r от него.

В1) (1 балл) Найдите напряжённость вихревого электрического поля на расстоянии b от оси очень длинного цилиндрического соленоида радиусом a ($b > a$), магнитное поле в котором изменяется с известной скоростью $\dfrac{dB}{dt}$.

Тонкую цилиндрическую трубку с радиусом основания r и длиной $2\pi R$ ($R \gg r$) из немагнитного материала согнули в кольцо, на которое после намотали N ($N \gg 1$) витков тонкого провода виток к витку, так что получилась тороидальная катушка. Выводы катушки подключили к специальному источнику напряжения, в итоге ток в катушке в зависимости от времени начал изменяться по закону $I(t) = kt$, где k — известная постоянная.

В2) (3 балла) Определите напряжённость вихревого электрического поля в центре тора.

В3) (3 балла) На главной оси тора на расстоянии h от него ($h \gg R$) располагается точечный заряд q. Какая сила действует на заряд со стороны вихревого электрического поля?

▲ **Решение. Что происходит.** Вне источников уравнения для $\vec{E}$ и $\vec{B}$ одинаковы по форме, поэтому формулы одной теории переписываются для другой заменой величин. Часть А: соленоид — цепочка одинаковых витков, то есть магнитных диполей, а цепочка диполей вдали выглядит как два разноимённых «заряда» на концах (рис. 2). Формулу диполя из условия применять нельзя: точки задачи лежат на расстоянии порядка L или ближе, поэтому поля торцов считаем отдельно. Часть В: вихревое поле меняющегося потока записывается так же, как теорема о циркуляции для тока, и задачу про $\vec{E}$ можно заменить задачей про $\vec{B}$ от тока.

Обозначения. Замена из условия: $\vec{E} \to \vec{B}$, $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to \dfrac{\mu_0}{4\pi}$, $\vec{p} \to \vec{\mu}$. Поле точечного заряда переходит в $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q_M}{r^2}$, диполь $p = ql$ — в $\mu = Q_M L$.

Пункт А1. Каждый виток — диполь с моментом $IS = I\pi R^2$ вдоль оси. У N витков моменты одного направления складываются: $\mu = NI\pi R^2$. Дальше соленоид — диполь длиной L: $\mu = Q_M L$ (рис. 2: внутри цепочки «заряды» соседних витков гасят друг друга, остаются только концы). Отсюда

$$Q_M = \frac{\mu}{L} = \frac{NI\pi R^2}{L}.$$

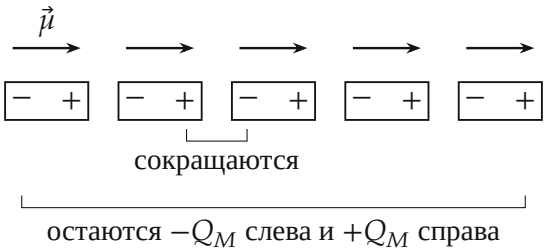


Рис. 2. Соленоид — цепочка витков; каждый виток — диполь $\vec{\mu}$ (от − к +). Заряды соседних витков гасят друг друга, остаются только концы.

Пункт А2. Точка A лежит на серединном перпендикуляре, на расстоянии $r = \sqrt{L^2/4 + b^2} \approx L/2$ от каждого торца (рис. 3): $b \ll L$, поэтому угол между направлением на торец и осью мал, косинус ≈ 1. Поле положительного торца направлено от него, отрицательного — к нему;

составляющие поперёк оси сокращаются, а вдоль оси складываются:

$$B_A = 2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_M}{(L/2)^2} = \frac{2\mu_0 Q_M}{\pi L^2} = \mu_0 \frac{2INR^2}{L^3}.$$

Поле $\vec{B}_A$ направлено против $\vec{\mu}$: линии замыкаются снаружи.

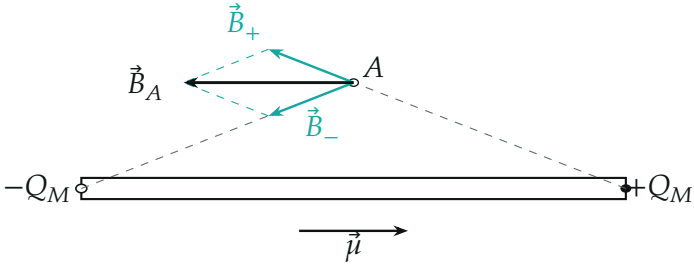


Рис. 3. Поля двух торцов в точке A и их сумма (правило параллелограмма); для наглядности b показано увеличенным.

Пункт А3. Точка на оси на расстоянии h от торца с зарядом $+Q_M$, $R \ll h \ll L$. Поле ближнего торца $\frac{\mu_0 Q_M}{4\pi h^2}$; поле дальнего (расстояние $L + h$) меньше в $\left(\frac{L+h}{h}\right)^2 \gg 1$ раз, им пренебрегаем:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q_M}{h^2} = \mu_0 \frac{INR^2}{4Lh^2},$$

вдоль $\vec{\mu}$ (от торца).

Пункт В1. Как для $\vec{B}$ вокруг тока ($B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$), для вихревого поля закон электромагнитной индукции даёт на окружности радиуса b вокруг оси $E \cdot 2\pi b = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|$. Нужен поток через эту окружность. Поле соленоида вне его в точке на расстоянии b при $L \to \infty$ стремится к нулю ($B_A \propto L^{-3}$, п. А2), поэтому весь поток идёт через сечение самого соленоида: $\Phi = B\pi a^2$ (поле внутри однородно):

$$E \cdot 2\pi b = \pi a^2 \frac{dB}{dt} \;\Rightarrow\; E = \frac{a^2}{2b} \frac{dB}{dt}.$$

Линии $\vec{E}$ — окружности вокруг оси.

Пункты В2, В3: аналогия. Сравним $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ и $E = \dfrac{1}{2\pi b}\dot{\Phi}$: формулы совпадают при замене $\mu_0 I \leftrightarrow \dot{\Phi}$ (рис. 4; знак — по правилу Ленца: при $\dot{\Phi} > 0$ линии $\vec{E}$ идут против вращения винта, закрученного вдоль $\vec{B}$ потока). Уравнения те же: $\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ вне источников, как $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$, $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ вне токов, при $\mu_0\vec{j} \leftrightarrow -\partial\vec{B}/\partial t$. Поэтому трубка, внутри которой меняется поток, создаёт вокруг то же поле, что провод с «током» $\dot{\Phi}/\mu_0$, для любой формы трубки.

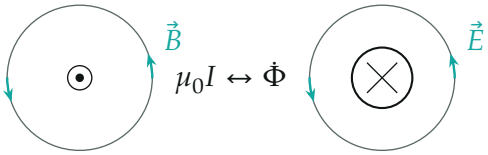


Рис. 4. Линии $\vec{B}$ вокруг тока «к нам» и линии $\vec{E}$ вокруг растущего потока «от нас» идут в одну сторону.

Пункт В2. Теорема о циркуляции для окружности радиуса R вдоль трубки: $B\cdot 2\pi R = \mu_0 NI$ (контур пронизывают N витков с током I; $R \gg r$, поэтому поле в трубке однородно), то есть $B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi R}$ и поток через сечение трубки $\Phi = B\pi r^2 = \dfrac{\mu_0 NIr^2}{2R}$. Вне тора поля нет, поэтому весь поток заключён в трубке. При $I = kt$ получаем $\dot{\Phi} = \dfrac{\mu_0 Nkr^2}{2R}$. Трубка — кольцо радиуса R с «током» $\dot{\Phi}/\mu_0$. В центре кольца закон Био — Савара даёт $B_0 = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$ (все элементы тока на расстоянии R и перпендикулярны радиусу — вклады складываются). Значит,

$$E_0 = \frac{\dot{\Phi}}{2R} = \mu_0 \frac{kNr^2}{4R^2}.$$

Пункт В3. Найдём поле кольца с током на оси на расстоянии h (рис. 5). Каждый элемент $d\vec{l}$ перпендикулярен $\vec{r}$, расстояние до точки

$\rho = \sqrt{R^2+h^2}$, $dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,dl}{\rho^2}$, а вдоль оси остаётся составляющая с множителем $\dfrac{R}{\rho}$ (поперечные составляющие гасятся):

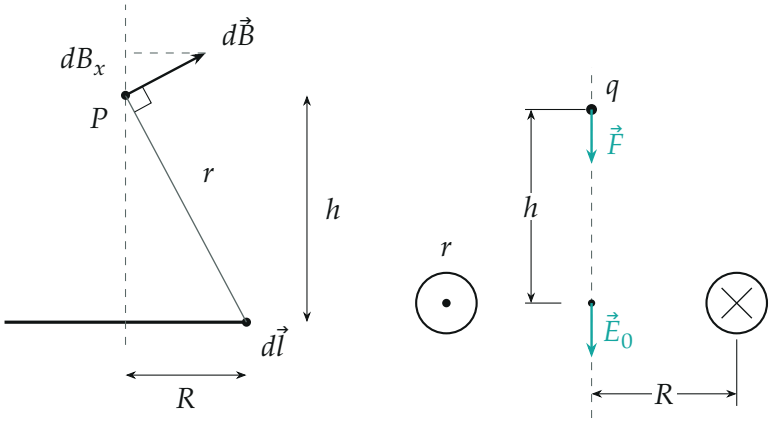


Рис. 5 (слева). Кольцо с током, вид сбоку: $d\vec{l}$ перпендикулярен плоскости рисунка, $d\vec{B} \perp \vec{r}$, вдоль оси остаётся dB_x. Рис. 6 (справа). Тор в разрезе через ось: линии $\vec{B}$ в трубке идут от нас справа и к нам слева; на оси $\vec{E}$ и сила на $q > 0$ направлены вниз при росте тока.

$$B(h) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho^2}\cdot\frac{R}{\rho}\cdot 2\pi R \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2h^3} \quad (h \gg R).$$

Заменяем $\mu_0 I \to \dot{\Phi}$: $F = qE(h) = \dfrac{q\dot{\Phi}R^2}{2h^3} = q\,\mu_0\dfrac{kNr^2R}{4h^3}$.

Обратите внимание: у тора внешнего магнитного поля нет, а вихревое электрическое есть — аналогия берёт поле кольца, а не тора. Направление (рис. 6): на оси $\vec{E}$ противоположно ходу винта, вращаемого вдоль линий $\vec{B}$ в трубке.

Проверка. При $b \to a$ получается $E = \frac{a}{2}\frac{dB}{dt}$, как у внутреннего поля $\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$ на границе; $E(h)/E_0 = R^3/h^3$ — дипольное убывание.

Ответ. A1) $Q_M = \dfrac{IN\pi R^2}{L}$; A2) $B_A = \mu_0\dfrac{2INR^2}{L^3}$; A3) $B = \mu_0\dfrac{INR^2}{4Lh^2}$; B1) $E = \dfrac{a^2}{2b}\dfrac{dB}{dt}$; B2) $E_0 = \mu_0\dfrac{kNr^2}{4R^2}$; B3) $F(h) = q\,\mu_0\dfrac{kNr^2R}{4h^3}$.