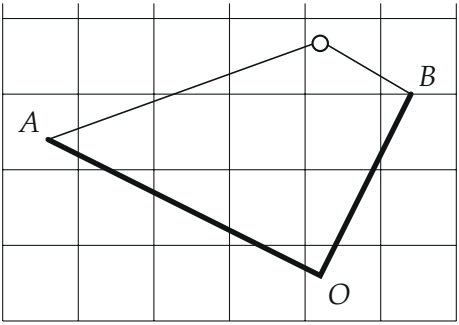
Уголок

Задача 1. [МОШ 2021/22, 7 класс, задача 1] Уголок состоит из двух однородных прямых стержней AO и BO одинакового сечения, жёстко соединённых в точке O (см. рисунок). Уголок подвешивают за нитку, привязанную к его концам, на гладком гвозде, вбитом в стену. В положении равновесия уголок располагается так, как показано на рисунке. Масса уголка равна 440 г. Нить можно считать невесомой.



1. Найдите массы стержней.
2. Чему равна средняя плотность уголка, если плотность стержня AO равна 2700 кг/м^3?

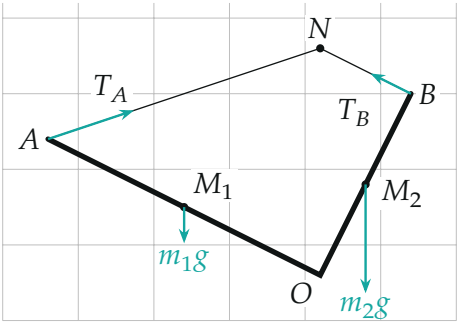
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие твёрдого тела (правило моментов) и на плотность. Нить лежит на гладком гвозде, поэтому обе её ветви тянут уголок к гвоздю: линии действия обеих сил натяжения проходят через гвоздь. Значит, относительно оси, проходящей через гвоздь, моменты сил натяжения равны нулю, и правило моментов содержит только силы тяжести стержней. Отсюда отношение масс. Длины стержней берём по клеткам, а так как сечения одинаковы, масса стержня пропорциональна произведению плотности на длину — отсюда плотности и средняя плотность.

Обозначения. m_1, l_1, ρ_1 — масса, длина и плотность стержня AO; m_2, l_2, ρ_2 — то же для BO; $m = m_1 + m_2 = 440$ г; S — площадь сечения; a — сторона клетки; N — гвоздь; M_1, M_2 — середины стержней (центры масс однородных стержней).

Пункт 1.

1. Силы, действующие на уголок. На уголок действуют: сила тяжести $m_1 g$, приложенная в середине M_1 стержня AO; сила тяжести $m_2 g$ в середине M_2 стержня BO; две силы натяжения нити T_A и T_B, приложенные в точках A и B и направленные вдоль нити к гвоздю N. Введём клетчатые координаты с началом в левом нижнем углу сетки (ось x вправо, ось y вверх): $A(1;4)$, $O(7;1)$, $B(9;5)$, $N(7;6)$. Середины стержней:

$$M_1\left(\tfrac{1+7}{2};\tfrac{4+1}{2}\right) = (4;\,2{,}5), \qquad M_2\left(\tfrac{9+7}{2};\tfrac{5+1}{2}\right) = (8;\,3).$$

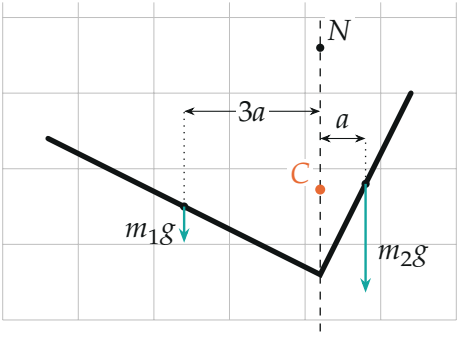


Силы, действующие на уголок. Силы натяжения нити направлены по нити к гвоздю N; тяжесть каждого стержня приложена в его середине. Длины стрелок $m_1 g$ и $m_2 g$ относятся как $1:3$.

2. Правило моментов относительно гвоздя. Уголок покоится, поэтому сумма моментов всех сил относительно любой оси равна нулю. Ось выберем через гвоздь N (перпендикулярно стене): линии действия обеих сил натяжения проходят через N, их плечи равны нулю, и неизвестные натяжения в уравнение не входят. Именно ради этого ось ставим в гвоздь.

Плечо силы тяжести — горизонтальное расстояние от вертикали через N ($x = 7$) до точки приложения: у $m_1 g$ это $7 - 4 = 3$ клетки (сила слева, вращает уголок против часовой стрелки), у $m_2 g$ это $8 - 7 = 1$ клетка (сила справа, вращает по часовой стрелке):

$$m_1 g \cdot 3a = m_2 g \cdot 1a \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = 3.$$



Плечи сил тяжести относительно гвоздя: 3a и a. Центр масс уголка C лежит точно под гвоздём.

То же самое другими словами: центр масс уголка C находится на одной вертикали с гвоздём. Его абсцисса

$$x_C = \frac{m_1 \cdot 4 + m_2 \cdot 8}{m_1 + m_2} = \frac{4 + 3 \cdot 8}{4} = 7 \text{ клеток, ровно под } N.$$

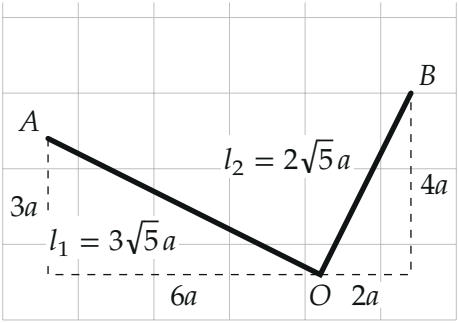
3. Массы стержней. Из $m_2 = 3m_1$ и $m_1 + m_2 = m$:

$$m_1 = \frac{m}{4} = \frac{440 \text{ г}}{4} = 110 \text{ г}, \qquad m_2 = \frac{3m}{4} = 330 \text{ г}.$$

Пункт 2.

4. Длины стержней по клеткам. Каждый стержень — гипотенуза прямоугольного треугольника на сетке. Стержень AO: катеты $6a$ и $3a$; стержень BO: катеты $2a$ и $4a$. По теореме Пифагора

$$l_1 = \sqrt{36 + 9}\, a = 3\sqrt{5}\, a, \qquad l_2 = \sqrt{4 + 16}\, a = 2\sqrt{5}\, a, \qquad \frac{l_2}{l_1} = \frac{2}{3}.$$



Длины стержней находим по теореме Пифагора из клеток: $l_1 : l_2 = 3 : 2$.

5. Плотность второго стержня. Сечения одинаковы, поэтому масса однородного стержня $m_i = \rho_i S l_i$. Делим массы:

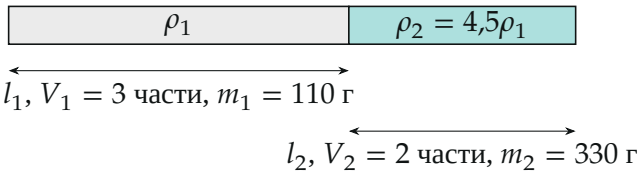
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{l_2}{l_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_1}{l_2} = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2},$$

$$\rho_2 = \frac{9}{2} \cdot 2700 = 12\,150 \text{ кг/м}^3.$$

Второй стержень втрое тяжелее при меньшей длине, поэтому он и плотнее в 4,5 раза.

6. Средняя плотность. Средняя плотность — это полная масса, делённая на полный объём (а не среднее арифметическое плотностей). Объёмы $V_1 = Sl_1$, $V_2 = Sl_2$:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m_1 + m_2}{S(l_1 + l_2)} = \frac{\rho_1 S l_1 + \rho_2 S l_2}{S(l_1 + l_2)} = \frac{\rho_1 \cdot 3 + \rho_2 \cdot 2}{3 + 2} =$$
$$= \frac{3 \cdot 2700 + 2 \cdot 12\,150}{5} \text{ кг/м}^3 = 6480 \text{ кг/м}^3.$$



Стержни уголка, выпрямленные в один: объёмы относятся как длины, 3 : 2*; масса второго втрое больше.*

Обратите внимание. Силу натяжения нити считать не нужно: удачный выбор оси (через гвоздь) убирает её из уравнения. Средняя плотность — не $\frac{\rho_1+\rho_2}{2} = 7425$ кг/м^3: так было бы только при равных объёмах стержней.

Ответ. $m_{AO} = \dfrac{m}{4} = 110$ г, $m_{BO} = \dfrac{3m}{4} = 330$ г;

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{3\rho_1 + 2\rho_2}{5} = \frac{3 + 2\cdot\frac{9}{2}}{5}\rho_1 = 2{,}4\rho_1 = 6480 \text{ кг/м}^3.$$

Проверка. Второй способ для средней плотности:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m}{m_1/\rho_1 + m_2/\rho_2} = \frac{440}{110/2700 + 330/12\,150} \text{ кг/м}^3 = 6480 \text{ кг/м}^3$$

— то же. Значение лежит между $\rho_1 = 2700$ и $\rho_2 = 12\,150$ кг/м^3, как и положено среднему. Размерность m_2/m_1 и ρ_2/ρ_1 — безразмерные отношения, верно.

Смысл: тяжёлый короткий стержень BO уравновешивает лёгкий длинный AO, потому что центр масс должен встать под гвоздь.

Ответ. 1) $m_{AO} = 110$ г, $m_{BO} = 330$ г; 2) $\rho_{\text{ср}} = 6480$ кг/м^3.