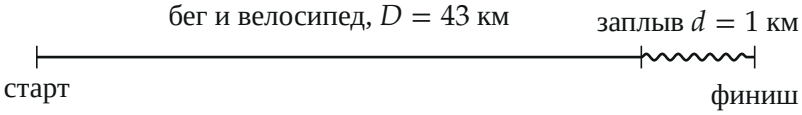
Триатлон

Задача 2. [МОШ 2021/22, 7 класс, задача 2] Команда из двух спортсменов участвует в мультиспортивной гонке, состоящей из трёх этапов: бега, велогонки и плавания. По условиям соревнований требуется сначала преодолеть 43 км (суммарно) бегом и на велосипеде, а в конце проплыть 1 км, при этом на старте команде выдаётся один велосипед, а зачётное время команды фиксируется по времени участника, пришедшего к финишу вторым. Первый спортсмен в среднем пробегает 24 км за 2 часа, проезжает на велосипеде 27 км за час и проплывает 1200 м за 30 мин. Средняя скорость бега второго спортсмена равна 9 км/ч, езды на велосипеде — 24 км/ч, а плавает он со скоростью 3 км/ч. Чему равно минимальное зачётное время, которое может показать эта команда при наилучшей тактике прохождения дистанции?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равномерное движение и поиск наилучшего варианта (минимум времени). Велосипед один, но его можно оставить на трассе: один спортсмен проезжает часть пути на велосипеде и дальше бежит, второй пробегает этот участок и дальше едет на оставленном велосипеде. Время каждого спортсмена зависит только от того, сколько километров он проехал, и чем больше проехал один, тем меньше осталось второму. Зачётное время — наибольшее из двух, и меньше всего оно, когда спортсмены финишируют одновременно.

Обозначения. $D = 43$ км — участок бега и велогонки, $d = 1$ км — заплыв. Скорости первого: бег $u_1 = \dfrac{24}{2} = 12$ км/ч, велосипед $w_1 = 27$ км/ч, плавание $c_1 = \dfrac{1{,}2 \text{ км}}{0{,}5 \text{ ч}} = 2{,}4$ км/ч. Скорости второго: $u_2 = 9$ км/ч, $w_2 = 24$ км/ч, $c_2 = 3$ км/ч. x — путь, который первый спортсмен проезжает на велосипеде; T_1, T_2 — время финиша первого и второго.



Поясняющий рисунок: дистанция гонки (масштаб условный).

1. Тактика: велосипед оставляют на трассе. Пусть первый спортсмен едет на велосипеде первые x километров, оставляет велосипед и дальше бежит. Второй пробегает эти x км, садится на велосипед и проезжает остаток $D-x$. Велосипедист обгоняет бегуна, поэтому велосипед будет ждать второго в точке передачи — тактика выполнима при любом x от 0 до D.

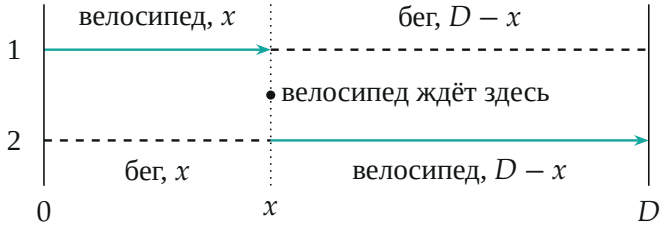


Схема передачи велосипеда: бирюзой — езда, пунктиром — бег.

2. Время каждого спортсмена через x. На каждом участке движение равномерное, время = путь/скорость:

$$T_1 = \frac{x}{w_1} + \frac{D-x}{u_1} + \frac{d}{c_1}, \qquad T_2 = \frac{x}{u_2} + \frac{D-x}{w_2} + \frac{d}{c_2}.$$

Подставим числа (время в часах, x в километрах):

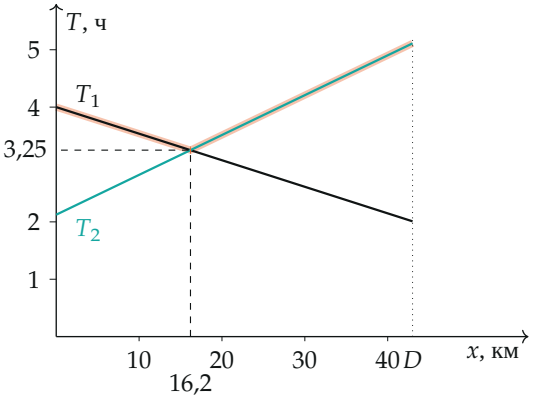
$$T_1 = \frac{x}{27} + \frac{43-x}{12} + \frac{1}{2{,}4} = 4 - \frac{5x}{108},$$
$$T_2 = \frac{x}{9} + \frac{43-x}{24} + \frac{1}{3} = \frac{17}{8} + \frac{5x}{72}.$$

T_1 убывает с ростом x (первый больше едет), T_2 растёт (второму достаётся меньше езды).

3. Почему лучшая тактика — одновременный финиш. Зачётное время $T = \max(T_1, T_2)$. Если $T_1 > T_2$, увеличим x: T_1 уменьшится, и зачётное время станет меньше. Если $T_2 > T_1$, уменьшим x. Значит, минимум — в точке, где прямые пересекаются, $T_1 = T_2$.

Остался вопрос, нельзя ли лучше, передавая велосипед несколько раз. Время каждого спортсмена зависит только от суммарного пути, который

он проехал (скорости постоянны, порядок участков не важен), а велосипед один и едет только вперёд, поэтому сумма путей езды обоих не больше D. Уменьшать эту сумму невыгодно: оба времени от этого только растут. Значит, любая тактика сводится к одной паре чисел x и $D-x$, и одной передачи достаточно.



Время финиша первого (T_1) и второго (T_2) в зависимости от x. Зачётное время — верхняя из двух линий (выделена), его минимум — в точке пересечения.

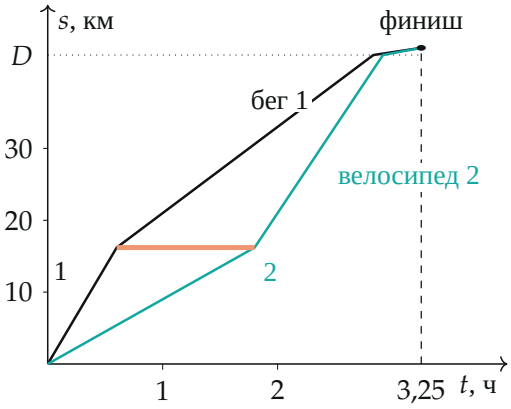
4. Находим x и время. Приравниваем:

$$4-\frac{5x}{108}=\frac{17}{8}+\frac{5x}{72} \quad\Rightarrow\quad 5x\left(\frac{1}{108}+\frac{1}{72}\right)=\frac{15}{8},$$

$$\frac{25x}{216}=\frac{15}{8} \quad\Rightarrow\quad x=16{,}2 \text{ км}.$$

$$T_{\min}=4-\frac{5\cdot 16{,}2}{108}=4-0{,}75=3{,}25 \text{ ч}=195 \text{ мин}.$$

5. Как выглядит гонка. Первый едет 16,2 км за $\frac{16{,}2}{27}=0{,}6$ ч, бежит 26,8 км за $\frac{26{,}8}{12}\approx 2{,}23$ ч и плывёт 25 мин: финиш через 3,25 ч. Второй бежит 16,2 км за 1,8 ч (велосипед ждёт его 1,2 ч), едет 26,8 км за $\approx 1{,}12$ ч и плывёт 20 мин: тоже 3,25 ч.



Путь от времени для обоих спортсменов при $x = 16{,}2$ км (последние короткие отрезки — заплыв). Красный отрезок — велосипед стоит в точке x и ждёт второго. Оба финишируют одновременно.

Обратите внимание. Плыть первому дольше (25 мин против 20), поэтому на суше ему нужно больше езды: равенство времён по суше было бы ошибкой — приравнивать надо полные времена.

Ответ. Первый спортсмен едет $x = \dfrac{216}{25} \cdot \dfrac{15}{8} = 16{,}2$ км и оставляет велосипед второму; $T_{\min} = 4 - \dfrac{5x}{108} = 3{,}25$ ч $= 195$ мин.

Проверка. Подставим $x = 16{,}2$ км во второе выражение: $T_2 = \frac{17}{8} + \frac{5 \cdot 16{,}2}{72} = 2{,}125 + 1{,}125 = 3{,}25$ ч — то же, что и T_1. Крайние случаи: если весь путь едет первый ($x = 43$), то второй бежит всё и финиширует через 5,1 ч; если весь путь едет второй ($x = 0$), то первый финиширует через 4 ч. Оптимум 3,25 ч меньше обоих, как и должно быть. Размерности: км, делённые на км/ч, — часы.

Смысл: велосипед выгоднее всего «поделить» так, чтобы ни один из спортсменов не ждал другого на финише.

Ответ. $T_{\min} = 3{,}25$ ч $= 195$ мин (первый спортсмен едет первые 16,2 км и оставляет велосипед второму).