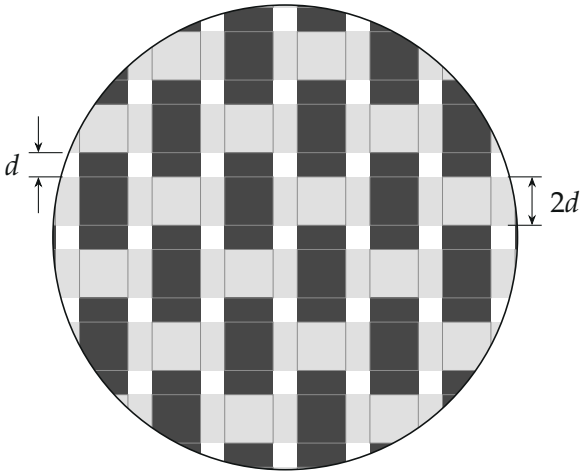
Пластиковое полотно

Задача 3. [МОШ 2021/22, 7 класс, задача 3] Большое количество полосок из пластика шириной $2d$ и толщиной $0{,}02d$ переплели между собой так, что получилось пластиковое полотно, небольшой фрагмент которого показан на рисунке. Ширина промежутка между любыми двумя параллельными полосками равна d.

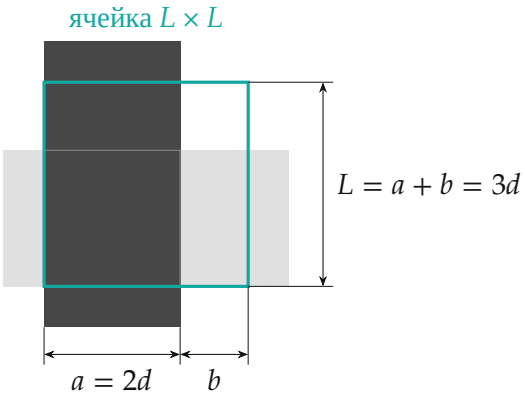


1. Как изменится поверхностная плотность полотна, если все линейные размеры (полосок и промежутков) станут в два раза меньше?
2. Во сколько раз изменится поверхностная плотность полотна, если ширина промежутков между полосками станет равна $0{,}5d$?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на плотность. Поверхностная плотность полотна — масса, приходящаяся на единицу площади: $\sigma = m/S$. Полотно повторяется: оно сложено из одинаковых квадратиков-ячеек, поэтому достаточно найти массу и площадь одной ячейки — отношение будет тем же, что у всего полотна. Масса ячейки пропорциональна объёму пластика в ней (плотность пластика ρ не меняется).

Обозначения. a — ширина полоски, b — ширина промежутка, c — толщина полоски; $L = a + b$ — период узора (сторона ячейки); ρ — плотность пластика; σ — поверхностная плотность. В исходном полотне $a = 2d$, $b = d$, $c = 0{,}02d$.

1. Ячейка полотна. Узор повторяется через расстояние $L = a + b$ и по горизонтали, и по вертикали. Выделим ячейку — квадрат $L \times L$, в который входит ровно один кусок горизонтальной полоски и один кусок вертикальной (рисунок).



Ячейка полотна (бирюзовый квадрат): в ней кусок горизонтальной полоски $a \times L$ и кусок вертикальной полоски $a \times L$; белый уголок $b \times b$ — дырка.

Площадь ячейки и объём пластика в ней (два куска полоски размером $a \times L \times c$; там, где полоски перекрываются, пластик лежит в два слоя, и оба слоя считаем):

$$S_я = L^2 = (a + b)^2, \qquad V_я = 2\,a\,L\,c = 2a(a + b)c.$$



в местах перекрытия пластик в два слоя

Разрез полотна вдоль горизонтальной полоски (толщина сильно увеличена): вертикальные полоски проходят то над ней, то под ней. Изгибом полосок пренебрегаем: толщина $c = 0{,}02d$ много меньше ширины.

Поверхностная плотность

$$\sigma = \frac{\rho V_я}{S_я} = \frac{2\rho\,a\,c}{a + b}.$$

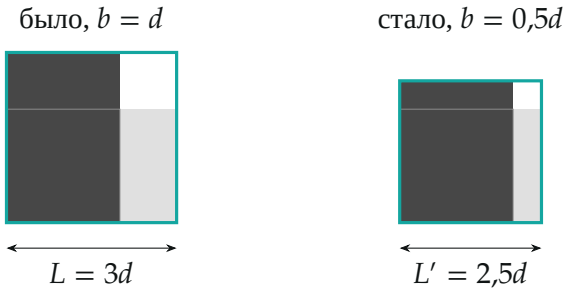
Для исходного полотна $\sigma_0 = \dfrac{2\rho \cdot 2d \cdot 0{,}02d}{3d} = \dfrac{0{,}08}{3}\,\rho d$.

2. Пункт 1: все размеры вдвое меньше. Площадь ячейки уменьшается в $2^2 = 4$ раза, а объём пластика (три размера: ширина, длина, толщина) — в $2^3 = 8$ раз. Значит,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}.$$

То же из формулы: $\sigma \propto ac/(a+b)$ — в числителе два размера, в знаменателе один, при уменьшении всех вдвое σ уменьшается вдвое.

3. Пункт 2: промежуток $b = 0{,}5d$**.** Ширина и толщина полосок прежние, меняется только период: $L' = 2d + 0{,}5d = 2{,}5d$.



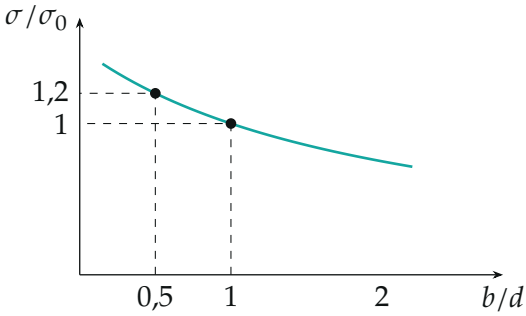
Ячейки до и после: полоски те же, промежуток меньше, поэтому пластика на единицу площади больше.

По формуле из шага 1 при неизменных a и c плотность обратно пропорциональна периоду:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \frac{a+b}{a+b'} = \frac{3d}{2{,}5d} = 1{,}2.$$

Плотность увеличится в 1,2 раза.

Прямой подсчёт по ячейке (в долях d): было $V = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 0{,}02 = 0{,}24$, $S = 9$, $\sigma \propto 0{,}0267$; стало $V = 2\cdot 2\cdot 2{,}5\cdot 0{,}02 = 0{,}20$, $S = 6{,}25$, $\sigma \propto 0{,}032$; отношение $0{,}032/0{,}0267 = 1{,}2$.



Зависимость $\sigma/\sigma_0 = 3/(2+b/d)$ при прежних полосках; точки — исходное полотно и пункт 2.

Обратите внимание. В пункте 1 уменьшается и толщина полосок — это тоже линейный размер. Поэтому масса ячейки падает в 8 раз, а не в 4, и плотность не остаётся прежней.

Ответ. $\sigma = \dfrac{2\rho ac}{a+b}$; 1) $\sigma_1 = \dfrac{\sigma_0}{2}$; 2) $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_0} = \dfrac{3d}{2{,}5d} = 1{,}2$.

Проверка. Размерность: $\rho\, a\, c/(a+b)$ — кг/м$^3 \cdot$ м $=$ кг/м^2, верно. Предел $b \to 0$ (полоски вплотную): $\sigma \to 2\rho c$ — ровно два слоя пластика по всей площади, как и должно быть. При $b \to \infty$ $\sigma \to 0$ — полоски редкие.

Смысл: плотность полотна определяется долей площади, покрытой пластиком, и толщиной; уплотнение узора поднимает её, уменьшение толщины — снижает.

Ответ. 1) уменьшится в 2 раза; 2) увеличится в 1,2 раза.