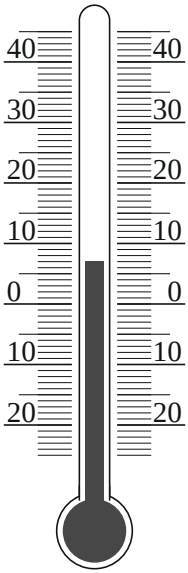
Бракованный термометр

Задача 4. [МОШ 2021/22, 7 класс, задача 4] Колбочка в нижней части спиртового термометра, изображенного на рисунке, соединена с трубочкой. Колбочка и часть трубочки заполнены подкрашенным спиртом. Работа термометра основана на явлении теплового расширения тел при нагревании. Если при некоторой температуре t_0 объём спирта равен V_0, то при другой температуре t объём спирта даётся формулой $V = V_0(1 + k(t - t_0))$, где k — коэффициент, который в условиях задачи можно считать постоянным и равным 0,001 обратных градусов Цельсия. Однажды на заводе был изготовлен бракованный термометр, в котором масса спирта составляла 98 % от той массы, которая должна быть в исправном термометре. Из-за этого бракованный термометр показывает заниженную температуру.



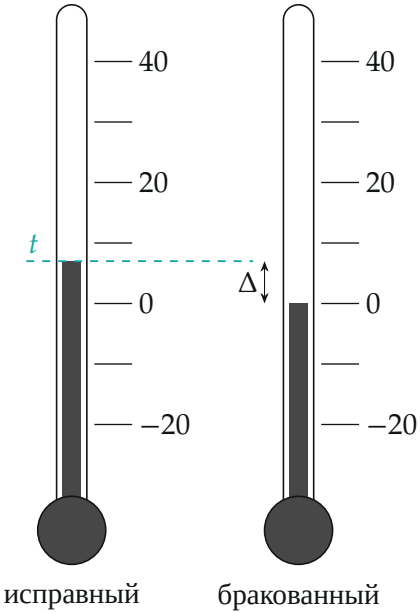
Какова истинная температура в комнате, если бракованный термометр показывает 0 °C? Какими будут показания бракованного термометра, если температура в комнате опустится до 0 °C?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тепловое расширение жидкости. Термометр не «знает» температуру — он показывает, до какой высоты дошёл спирт, то есть какой у спирта объём. Шкала размечена для исправного термометра: каждому делению соответствует объём спирта, который был бы у исправного термометра при этой температуре. Колбочка и трубочка у бракованного такие же, значит, одинаковый объём спирта — одинаковое показание. У бракованного спирта на 2 % меньше по массе, а значит, при любой температуре и по объёму в 0,98 раза меньше: столбик стоит ниже.

Обозначения. V_0 — объём спирта исправного термометра при $0\,^\circ\mathrm{C}$ (берём $t_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$, начало шкалы); $V(t) = V_0(1 + kt)$ — объём спирта исправного термометра при температуре t; $V_б(t)$ — объём спирта бракованного; τ — показание бракованного; t_1, t_2 — искомые величины; $k = 0{,}001\,^\circ\mathrm{C}^{-1}$.

1. Объём спирта в бракованном термометре. У спирта в обоих термометрах одна и та же плотность при одной температуре, поэтому объёмы относятся как массы:

$$V_б(t) = 0{,}98\,V(t) = 0{,}98\,V_0(1 + kt).$$



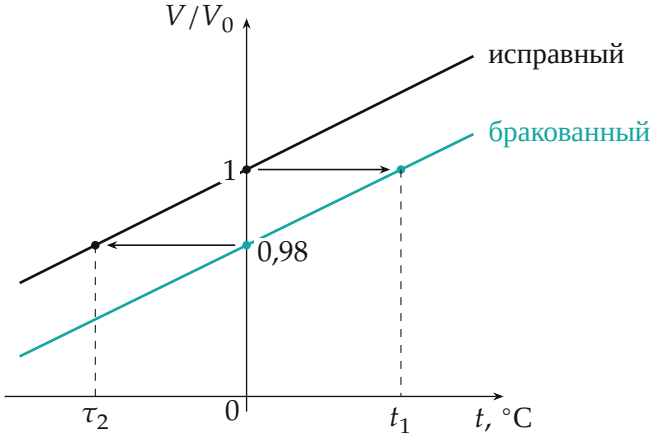
Оба термометра при одной и той же температуре t: у бракованного спирта меньше, и столбик ниже на Δ — он показывает заниженную температуру.

2. Что показывает бракованный термометр. Показание τ — это такая температура, при которой у *исправного* термометра был бы тот же объём спирта, что у бракованного сейчас:

$$V(\tau) = V_6(t) \quad \Rightarrow \quad V_0(1 + k\tau) = 0{,}98\, V_0(1 + kt),$$

$$1 + k\tau = 0{,}98\,(1 + kt).$$

Это уравнение связывает истинную температуру t и показание τ.



Объём спирта в зависимости от температуры. Показание — точка на чёрной прямой с тем же объёмом. Верхняя стрелка: бракованный показывает 0, *истинная* t_1*; нижняя: истинная* 0, *показание* τ_2*. Ось объёма начинается не с нуля.*

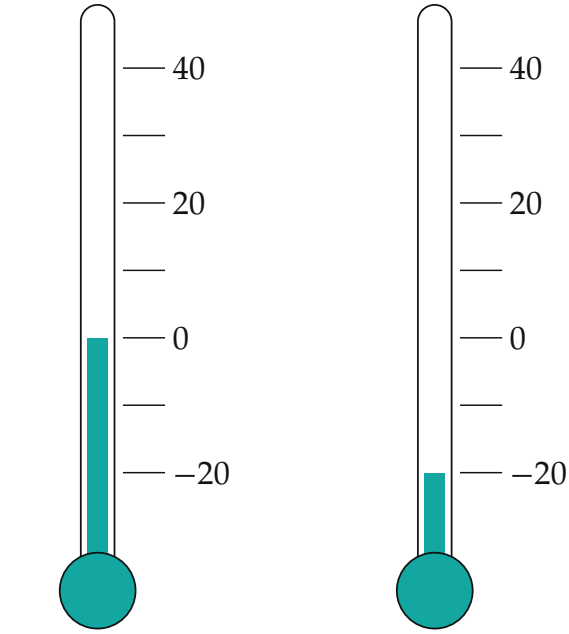
3. Первый вопрос: $\tau = 0$**.** Подставляем:

$$1 = 0{,}98\,(1 + kt_1) \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{0{,}98} - 1\right) = \frac{0{,}0204}{0{,}001\,^\circ\text{C}^{-1}} \approx 20{,}4\,^\circ\text{C}.$$

Чтобы спирт бракованного термометра расширился до «нулевого» объёма V_0, его нужно нагреть так, чтобы объём вырос примерно на 2 %, а каждый градус даёт 0,1 %: около 20 градусов.

4. Второй вопрос: $t = 0$**.** Подставляем $t_2 = 0$:

$$1 + k\tau_2 = 0{,}98 \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{0{,}98 - 1}{k} = -\frac{0{,}02}{0{,}001\,^\circ\text{C}^{-1}} = -20\,^\circ\text{C}.$$



$\tau = 0$,
истинная $t_1 \approx 20$

истинная 0,
$\tau_2 = -20$

Показания бракованного термометра в двух случаях задачи.

Обратите внимание. Ответы не строго симметричны (20,4 и −20) потому, что формула $V = V_0(1 + k(t - t_0))$ при постоянном k приближённая: если отсчитывать её от другой температуры t_0, числа сдвигаются на десятые доли градуса. Поэтому организаторы дают ответ с точностью $\pm 0{,}2\,^\circ\text{C}$: $\approx 20\,^\circ\text{C}$ и $\approx -20\,^\circ\text{C}$.

Ответ. $t_1 = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{0{,}98} - 1\right) \approx 20\,^\circ\text{C}$ (точнее $20{,}4\,^\circ\text{C}$); $\tau_2 = -\dfrac{0{,}02}{k} = -20\,^\circ\text{C}$.

Проверка. Размерность: $1/k$ — градусы, верно. Знак: бракованный показывает меньше истинной — в обоих случаях $\tau < t$, как сказано в условии. Второй способ (оценка): 2 % объёма при 0,1 % на градус — 20 градусов разницы при любой температуре.

Смысл: недолив спирта на 2 % сдвигает всю шкалу примерно на 20 градусов вниз.

Ответ. $t_1 \approx 20\,^\circ\mathrm{C}$ (по формуле с $t_0 = 0$: $20{,}4\,^\circ\mathrm{C}$); показание $\tau_2 \approx -20\,^\circ\mathrm{C}$.