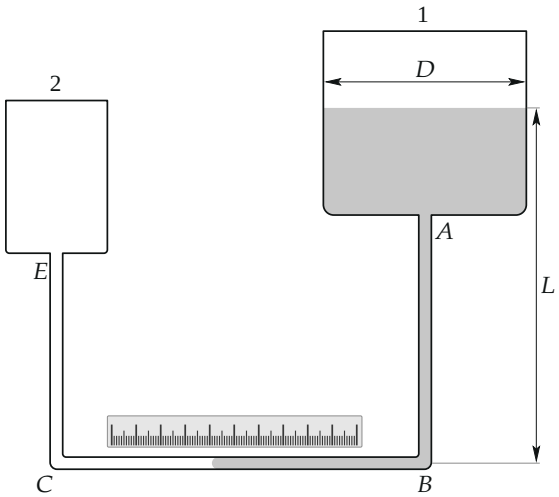
Гравиметр Ломоносова

Задача 2. [МОШ 2021/22, 8 класс, задача 2] На рисунке, приведённом ниже, показан прибор, придуманный М.В. Ломоносовым для измерения ускорения свободного падения. Два цилиндрических сосуда 1 и 2 соединены тонкой стеклянной трубкой $ABCE$ постоянного сечения. Часть герметичного сосуда 1 и часть трубки заполнены ртутью, а остальная часть этой системы заполнена газами (воздухом и парами ртути). Сосуд 2 сообщается с атмосферой. Температура сосудов поддерживается постоянной. Диаметр сосуда 1 равен $D = 90$ мм, а внутренний диаметр трубки равен $d = 0{,}64$ мм. Около горизонтального участка трубки BC расположена линейка для измерения положения левой границы ртути.



Одно из назначений этого прибора — измерение высот. Известно, что зависимость ускорения свободного падения g от высоты h над поверхностью Земли описывается формулой

$$g(h) = g_0 - kh,$$

где $g_0 = 9{,}8$ Н/кг, $k = 3{,}07 \cdot 10^{-6}$ Н/(кг·м). Пусть на первом этаже некоторого здания высота уровня ртути в сосуде 1 равна $L = 50$ см. Когда

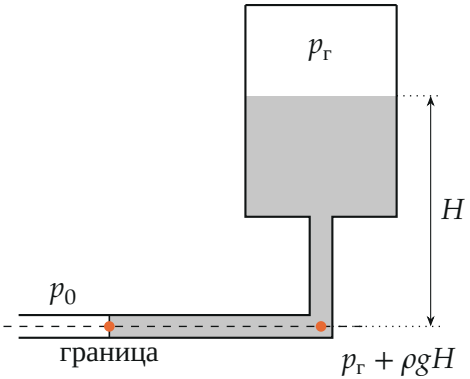
прибор подняли на крышу здания, граница ртути и воздуха в горизонтальной трубке сместилась на расстояние $x = 10$ см. Определите высоту здания. Считайте, что изменение давления газов в первом сосуде пренебрежимо мало. Изменением атмосферного давления с высотой можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатику: ртуть в приборе покоится, поэтому давление на уровне горизонтальной трубки BC одинаково с обеих сторон от ртути. Справа его создают газ над ртутью в сосуде 1 и столб ртути высотой L, слева — атмосфера через сосуд 2. Давления газа и атмосферы не меняются, значит, не меняется и давление столба $\rho g L$: если g уменьшается, столб должен стать выше. Ртуть для этого перетекает из горизонтальной трубки в широкий сосуд, и граница ртути в тонкой трубке сдвигается заметно, хотя уровень в сосуде растёт ничтожно. Прибор — «рычаг» по объёму: отношение площадей $(D/d)^2 \approx 2 \cdot 10^4$.

Обозначения. ρ — плотность ртути; $p_г$ — давление газов над ртутью в сосуде 1; p_0 — атмосферное давление; H — высота уровня ртути в сосуде 1 над трубкой BC (на первом этаже $H = L$); ΔL — подъём уровня в сосуде 1 на крыше; h — высота здания; $S = \frac{\pi D^2}{4}$, $s = \frac{\pi d^2}{4}$ — площади сечения сосуда и трубки.

1. Условие равновесия ртути. Ртуть покоится, поэтому давление в ней на одном горизонтальном уровне одинаково. Сравним давление на уровне трубки BC под сосудом 1 и у левой границы ртути в трубке. У границы ртуть граничит с воздухом, который через трубку CE и сосуд 2 сообщается с атмосферой: там давление p_0 (вес воздуха в трубке не учитываем). Под сосудом 1 давление равно давлению газа плюс давление столба ртути высотой H. Горизонтальная трубка заполнена ртутью на одном уровне, поэтому

$$p_г + \rho g H = p_0.$$



На одном горизонтальном уровне (пунктир) давление в покоящейся ртути одинаково: $p_г + \rho g H = p_0$.

2. Что происходит при подъёме на крышу. По условию $p_г$ и p_0 не меняются, поэтому не меняется и произведение gH:

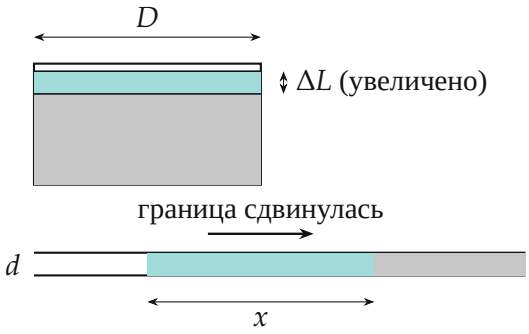
$$\rho g_0 L = \rho g(h)\,(L + \Delta L) \quad \Rightarrow \quad g_0 L = (g_0 - kh)(L + \Delta L).$$

На крыше g меньше, значит, H больше: уровень в сосуде 1 поднимается на ΔL. Ртуть для этого приходит из горизонтальной трубки, и её левая граница сдвигается на x вправо, к точке B.

3. Связь ΔL и x — сохранение объёма ртути. Ртуть несжимаема, и сколько её ушло из трубки, столько добавилось в сосуд:

$$s\,x = S\,\Delta L \quad \Rightarrow \quad \Delta L = x\Big(\frac{d}{D}\Big)^2 = 0{,}1\text{ м} \cdot \Big(\frac{0{,}64}{90}\Big)^2 = 5{,}06 \cdot 10^{-6}\text{ м}.$$

Уровень в сосуде поднимается всего на 5 мкм, а граница в трубке уходит на 10 см: отношение $\frac{x}{\Delta L} = \frac{D^2}{d^2} \approx 2 \cdot 10^4$. Поэтому изменения g на доли процента можно заметить по линейке.



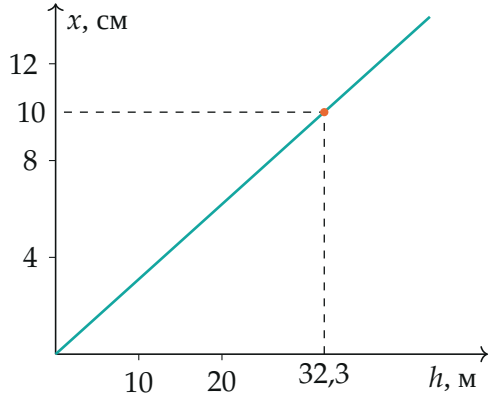
Объём ртути, ушедшей из трубки (бирюзовый цилиндр длиной x и диаметром d), равен объёму слоя толщиной ΔL в сосуде диаметром D.

4. Высота здания. Из равенства шага 2 раскроем скобки: $g_0 L = g_0 L + g_0 \Delta L - kh(L + \Delta L)$, откуда

$$h = \frac{g_0\,\Delta L}{k\,(L + \Delta L)} \approx \frac{g_0\,\Delta L}{kL} = \frac{g_0\,x\,d^2}{k\,L\,D^2}.$$

Поправка ΔL рядом с $L = 0{,}5$ м — одна стотысячная, её отбрасываем. Числа:

$$h = \frac{9{,}8 \cdot 5{,}06 \cdot 10^{-6}}{3{,}07 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5}\ \text{м} = 32{,}3\ \text{м}.$$



«Градуировка» прибора: сдвиг границы $x = \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{kL}{g_0} h$, это примерно 3,1 мм на метр высоты (прямая построена по формуле шага 4).

Обратите внимание. Высота уровня $L = 50$ см нужна: от неё зависит, насколько меняется давление столба при изменении g. Длина и форма трубок, положение сосуда 2 в ответ не входят — важен только перепад уровней ртути.

Ответ.

$$h = \frac{g_0\, x\, d^2}{k\, L\, D^2} = \frac{9{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}64 \cdot 10^{-3})^2}{3{,}07 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}09)^2}\ \text{м} \approx 32\ \text{м}.$$

Проверка. Размерность:

$$\frac{(\text{Н/кг}) \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{Н/(кг} \cdot \text{м)} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2} = \text{м} \text{ — верно.}$$

Второй способ через относительные изменения:

$$\frac{|\Delta g|}{g_0} = \frac{kh}{g_0} = \frac{3{,}07 \cdot 10^{-6} \cdot 32{,}3}{9{,}8} = 1{,}01 \cdot 10^{-5},$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{5{,}06 \cdot 10^{-6}}{0{,}5} = 1{,}01 \cdot 10^{-5}$$

— совпадают, как и требует $gH = \text{const}$. Знак: на высоте g меньше, столб растёт, граница сдвигается к B.

Смысл: прибор переводит относительное изменение g порядка 10^{-5} в смещение на 10 см за счёт отношения площадей сосуда и трубки.

Ответ. $h = \dfrac{g_0\, x\, d^2}{k\, L\, D^2} \approx 32$ м (точнее 32,3 м).