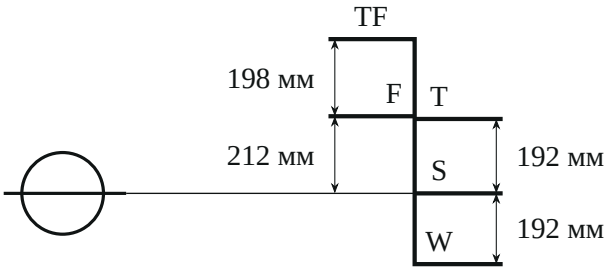
Грузовая марка

Задача 3. [МОШ 2021/22, 8 класс, задача 3] Грузовая марка (Plimsoll line) — это отметка на борту торгового судна, показывающая, до какого уровня судно может погружаться в различные воды при максимальной загрузке. На рисунке приведён пример грузовой марки некоторого судна и обозначены расстояния между отметками марки. Верхняя линия TF указывает предельную осадку нагруженного судна в пресной воде в тропиках, плотность которой равна 994 кг/м^3. Ниже расположена линия F, соответствующая осадке в пресной воде в умеренных широтах (плотность равна 998 кг/м^3). Площадь сечения корпуса судна на уровне воды вблизи марки можно считать постоянной.



1. Какова плотность зимней морской воды, которой соответствует линия W на грузовой марке?
2. Используя данные задачи, найдите разность температур пресной воды в тропиках и умеренных широтах, если коэффициент теплового расширения воды равен $3\cdot10^{-4}$ 1/°C. Коэффициент теплового расширения равен относительному увеличению объёма тела при изменении его температуры на один градус.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на условие плавания тел. Нагруженное судно имеет одну и ту же массу в любой воде, поэтому масса вытесненной воды тоже одна и та же. Сечение корпуса у ватерлинии постоянно, значит, объём погружённой части равен $S \cdot H$ с точностью до постоянной добавки, а при постоянном сечении по всей высоте — просто SH (H — осадка). Тогда $\rho H = \text{const}$: чем плотнее вода, тем мельче

сидит судно. Пара линий TF и F с известными плотностями даёт саму осадку H, а дальше по расстоянию до линии W находим её плотность. Во втором пункте разница плотностей пресной воды объясняется тепловым расширением.

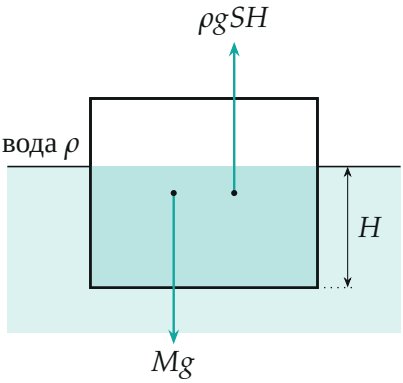
Обозначения. M — масса нагруженного судна; S — площадь сечения корпуса на уровне воды; H_{TF}, H_{F}, H_{W} — осадки (глубина погружения днища) у соответствующих линий; $\rho_{\text{TF}} = 994$ кг/м^3, $\rho_{\text{F}} = 998$ кг/м^3, ρ_W — плотности воды; $a = 198$ мм, $b = 212$ мм, $c = 192$ мм — расстояния на марке; $\beta = 3 \cdot 10^{-4}\ 1/^\circ\text{C}$.

Пункт 1.

1. Условие плавания. На судно действуют сила тяжести Mg вниз и сила Архимеда $\rho g V_{\text{погр}}$ вверх. Судно покоится, второй закон Ньютона в проекции на вертикаль:

$$\rho g\, SH - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho H = \frac{M}{S} = \text{const}.$$

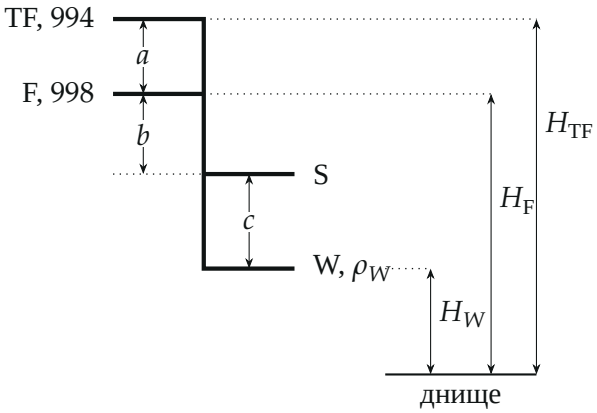
(Мы считаем сечение постоянным по всей погружённой высоте. Если корпус ниже ватерлинии уже, к SH добавляется постоянная поправка, и к линиям марки она относится так же; условие задачи даёт только постоянство S вблизи марки, поэтому пользуемся моделью «призма».)



Судно (корпус постоянного сечения S) плавает с осадкой H: сила Архимеда уравновешивает тяжесть.

2. Осадка по линиям TF и F. Линия TF выше линии F на a: в тропической пресной воде судно сидит глубже, $H_{\text{TF}} = H_{\text{F}} + a$. Из $\rho H = \text{const}$:

$$\rho_{\text{TF}}(H_{\text{F}} + a) = \rho_{\text{F}} H_{\text{F}} \quad \Rightarrow \quad H_{\text{F}} = \frac{\rho_{\text{TF}}\, a}{\rho_{\text{F}} - \rho_{\text{TF}}} = \frac{994 \cdot 0{,}198}{4}\ \text{м} = 49{,}2\ \text{м}.$$

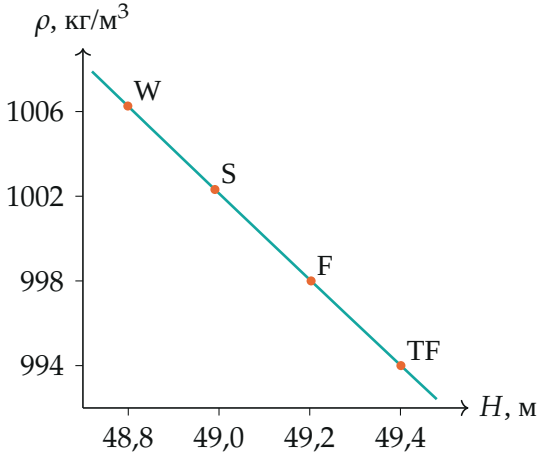


Осадки отсчитываем от днища (масштаб по вертикали разорван: сами осадки — десятки метров, расстояния на марке — десятки сантиметров). $H_{TF} = H_F + a$, $H_W = H_F - b - c$.

3. Плотность для линии W. Линия W ниже линии F на $b + c$ (212 + 192 = 404 мм), поэтому $H_W = H_{\text{F}} - (b + c)$. Снова $\rho H = \text{const}$:

$$\rho_W = \rho_{\text{F}} \frac{H_{\text{F}}}{H_{\text{F}} - (b + c)} = 998 \cdot \frac{49{,}203}{49{,}203 - 0{,}404}\ \text{кг/м}^3 = 1006\ \text{кг/м}^3.$$

Тот же результат в относительных изменениях: для малых сдвигов $\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx -\frac{\Delta H}{H}$, и отношение $\frac{b+c}{a} = \frac{404}{198}$ даёт $\Delta\rho \approx \frac{404}{198} \cdot 4\ \text{кг/м}^3 = 8{,}2\ \text{кг/м}^3$, то есть $\rho_W \approx 998 + 8 = 1006\ \text{кг/м}^3$.



Гипербола $\rho = \frac{\rho_F H_F}{H}$, на ней точки линий марки (посчитаны по $H_F = 49{,}2$ м); на таком малом участке она почти прямая.

Пункт 2.

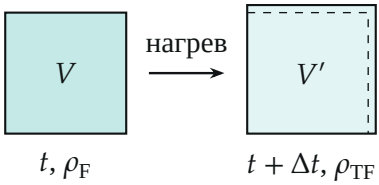
4. Тепловое расширение. Одна и та же масса пресной воды m в умеренных широтах занимает объём V, в тропиках при температуре на Δt выше — объём $V(1 + \beta\Delta t)$ (по определению коэффициента теплового расширения). Плотность обратно пропорциональна объёму:

$$\frac{\rho_\text{F}}{\rho_\text{TF}} = \frac{m/V}{m/(V(1+\beta\Delta t))} = 1 + \beta\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{1}{\beta}\Big(\frac{\rho_\text{F}}{\rho_\text{TF}} - 1\Big).$$

Числа:

$$\Delta t = \frac{1}{3\cdot 10^{-4}} \cdot \frac{998-994}{994}\,^\circ\text{C} = \frac{4{,}02\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^{-4}}\,^\circ\text{C} = 13{,}4\,^\circ\text{C}.$$

Это же можно получить прямо из марки: $\frac{\rho_\text{F}}{\rho_\text{TF}} = \frac{H_\text{TF}}{H_\text{F}} = 1 + \frac{a}{H_\text{F}}$, то есть тепловое расширение воды «записано» в расстоянии a между линиями TF и F.



Одна и та же масса воды при нагреве на Δt занимает объём $V' = V(1+\beta\Delta t)$ (изменение увеличено), и плотность во столько же раз меньше.

Обратите внимание. Условие плавания задаёт не саму плотность, а произведение ρH, поэтому сначала нужна осадка H_F — её даёт пара линий с известными плотностями. По числам марки она получается около 49 м (у реальных судов меньше, и расстояния на настоящих марках меньше), но на ответ это не влияет: важны отношения.

Ответ.

$$\rho_W = \frac{\rho_F \rho_{TF}\, a}{\rho_{TF}\, a - (\rho_F - \rho_{TF})(b + c)} \approx 1006 \text{ кг/м}^3,$$

$$\Delta t = \frac{\rho_F - \rho_{TF}}{\beta\, \rho_{TF}} \approx 13{,}4\ ^\circ\text{C}.$$

Проверка. Подставим в общую формулу: знаменатель $994 \cdot 0{,}198 - 4 \cdot 0{,}404 = 196{,}81 - 1{,}62 = 195{,}20$, $\rho_W = \frac{998 \cdot 994 \cdot 0{,}198}{195{,}20} = 1006{,}3$ кг/м^3 — то же. Морская вода плотнее пресной, и судно в ней сидит выше: линия W ниже всех — верно. Размерности: ρ_W — кг/м^3, Δt — $1/(1/^\circ\text{C}) = ^\circ\text{C}$.

Смысл: каждая линия марки — одна и та же масса вытесненной воды при разной её плотности.

Ответ. 1) $\rho_W \approx 1006$ кг/м^3; 2) $\Delta t \approx 13{,}4\ ^\circ$C.