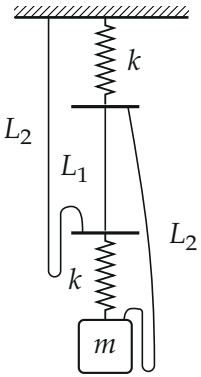
Пружины и нити

Задача 4. [МОШ 2021/22, 8 класс, задача 4] На рисунке изображена схема механической системы, которая состоит из двух одинаковых пружин жёсткостью k и длиной L в недеформированном состоянии, одной нити длиной L_1 (которая в исходном состоянии натянута), двух одинаковых нитей длиной L_2 (провисающих в исходном состоянии) и груза массой m.



Список оборудования содержит: четыре груза разной массы, четыре комплекта пружин (по две одинаковые пружины в каждом комплекте) и четыре комплекта нитей, в каждом из которых есть две одинаковые длинные нити и одна короткая. Параметры изделий в каждом комплекте представлены в таблице, приведённой ниже.

№	1	2	3	4
m, кг	1,0	1,5	2,0	4,0
L_1, см; L_2, см	10; 50	10; 45	20; 35	21; 50
k, Н/м; L, см	600; 20	700; 15	30; 10	1000; 15

Укажите номера грузов, комплектов пружин и нитей, которые следует выбрать при сборке системы, чтобы после пережигания короткой нити положение равновесия груза оказалось выше, чем до пережигания. Подходящие элементы необязательно расположены в одном столбце таблицы. Сочетать нити из разных комплектов запрещается. При анализе задачи можно считать, что масса пружин пренебрежимо мала, а нити —

невесомые и нерастяжимые. Ускорение свободного падения считайте равным 10 Н/кг.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равновесие груза на пружинах и на соединение пружин. До пережигания пружины соединены последовательно через короткую нить: каждая растянута весом груза mg, и груз висит низко. После пережигания короткой нити груз держат две «ветви» рядом: в одной — длинная нить и нижняя пружина, в другой — верхняя пружина и вторая длинная нить. Пружины теперь работают параллельно, каждая несёт только половину веса и растянута вчетверо меньше суммарного прежнего растяжения. Длинная нить L_2 при этом длиннее, чем короткая L_1 плюс одна пружина. Груз поднимется, если выигрыш на растяжении пружин больше проигрыша на длине нитей. Второе ограничение: в исходном состоянии длинные нити должны провисать.

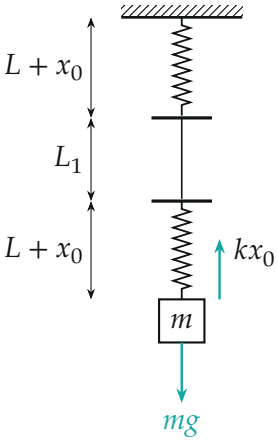
Обозначения. $x_0 = \frac{mg}{k}$ — растяжение одной пружины под весом mg; y_1, y_2 — расстояние от потолка до груза до и после пережигания; $\delta = L_2 - L_1 - L$.

1. Равновесие до пережигания. Нижняя пружина держит груз: по второму закону Ньютона для покоящегося груза в проекции на вертикаль сила упругости равна mg, растяжение x_0. Верхняя пружина держит нижнюю пружину, нить L_1 и груз; массы пружин и нитей малы, поэтому её растяжение тоже x_0. Длина цепочки от потолка до верха груза:

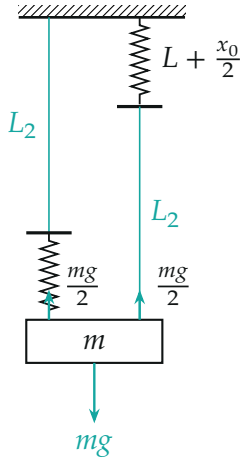
$$y_1 = (L + x_0) + L_1 + (L + x_0) = 2L + L_1 + 2x_0.$$

Длинные нити провисают, если они длиннее расстояния между точками, которые соединяют. Левая соединяет потолок и нижнюю пластину (расстояние $L+x_0+L_1$), правая — верхнюю пластину и груз (расстояние $L_1 + L + x_0$). Условие провисания одно и то же:

$$L_2 > L + L_1 + x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 < \delta.$$



до: последовательно



после: параллельно

Слева — до пережигания: пружины соединены последовательно, каждая растянута на x_0. Справа — после: две ветви «нить L_2 + пружина» держат груз параллельно, на каждую пружину приходится $\frac{mg}{2}$ (нити длиной L_2 выделены бирюзой; провисание и петли не показаны).

2. Равновесие после пережигания. Короткая нить сгорела, и груз опускается, пока не натянутся длинные нити. Теперь от потолка до груза две ветви: «пружина + нить L_2» и «нить L_2 + пружина». Нити нерастяжимы, обе ветви одной длины y_2, поэтому и растяжения пружин одинаковы, $x_1 = x_2$. Второй закон Ньютона для покоящегося груза в проекции на вертикаль:

$$kx_1 + kx_2 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \frac{mg}{2k} = \frac{x_0}{2},$$

$$y_2 = L_2 + L + \frac{x_0}{2}.$$

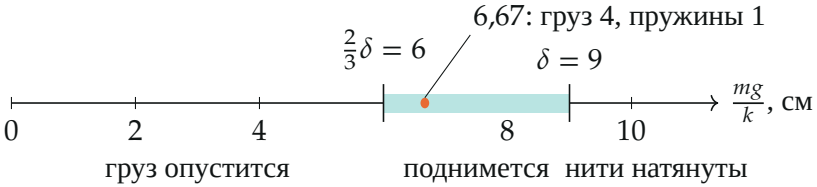
3. Когда груз поднимется. Нужно $y_2 < y_1$:

$$L_2 + L + \frac{x_0}{2} < 2L + L_1 + 2x_0 \quad \Rightarrow$$

$$\delta = L_2 - L_1 - L < \frac{3}{2}x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 > \frac{2}{3}\delta.$$

Вместе с условием провисания из шага 1 получаем «окно»:

$$\frac{2}{3}\delta < \frac{mg}{k} < \delta, \qquad \delta = L_2 - L_1 - L > 0.$$



«Окно» для растяжения $\frac{mg}{k}$ при нитях №4 и пружинах №1 ($\delta = 50 - 21 - 20 = 9$ см). Левее окна груз после пережигания опустится, правее — длинные нити натянуты с самого начала, и пережигание ничего не меняет.

4. Перебор по таблице. Сначала $\delta > 0$: нити и пружины должны позволять провисание. Для каждой пары «нити j, пружины q» найдём δ и окно, а потом проверим грузы ($x_0 = \frac{mg}{k}$, $g = 10$ Н/кг).

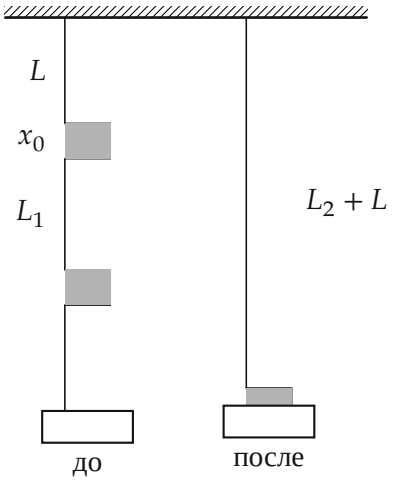
- Пружины №3 ($k = 30$ Н/м): даже груз 1 кг растягивает их на $x_0 = 33$ см, а наибольшее $\delta = 50 - 10 - 10 = 30$ см — провисания нет. Отпадают.
- Пружины №2 ($k = 700$, $L = 15$ см): $x_0 = 1{,}4;\ 2{,}1;\ 2{,}9;\ 5{,}7$ см. Окна: нити №1 $\delta = 25$ (16,7 … 25), №2 $\delta = 20$ (13,3 … 20), №3 $\delta = 0$, №4 $\delta = 14$ (9,3 … 14) — ни один груз не попадает.
- Пружины №4 ($k = 1000$, $L = 15$): $x_0 = 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 4$ см — тем более мало при тех же окнах.
- Пружины №1 ($k = 600$, $L = 20$): $x_0 = 1{,}7;\ 2{,}5;\ 3{,}3;\ 6{,}7$ см. Окна: нити №1 $\delta = 20$ (13,3 … 20), №2 $\delta = 15$ (10 … 15), №3 $\delta < 0$, №4 $\delta = 9$ (6 … 9). Подходит только груз №4: $6 < 6{,}67 < 9$.

Перебор всех $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ сочетаний на python дал тот же единственный набор.

5. Насколько поднимется груз. При $m = 4$ кг, $k = 600$ Н/м, $L = 20$ см, $L_1 = 21$ см, $L_2 = 50$ см: $x_0 = 6{,}67$ см,

$$y_1 = 2 \cdot 20 + 21 + 2 \cdot 6{,}67 = 74{,}3 \text{ см}, \qquad y_2 = 50 + 20 + 3{,}33 = 73{,}3 \text{ см}.$$

Груз поднимется на 1 см.



Длины в масштабе (по вертикали, см): серым — растяжения пружин (x_0 у каждой до пережигания, $\frac{x_0}{2}$ после). До: 74,3 см, после: 73,3 см.

Обратите внимание. Мало проверить только «груз поднимется»: если длинные нити натянуты уже до пережигания (правее окна), пережигание короткой нити ничего не изменит. Поэтому условий два, и окно ограничено с обеих сторон.

Ответ. Подходят те элементы, для которых $\frac{2}{3}(L_2 - L_1 - L) < \frac{mg}{k} < L_2 - L_1 - L$: груз №4 ($m = 4{,}0$ кг), пружины №1 ($k = 600$ Н/м, $L = 20$ см), нити №4 ($L_1 = 21$ см, $L_2 = 50$ см).

Проверка. Числа: $\frac{2}{3} \cdot 9 = 6 < 6{,}67 < 9$ см — оба условия выполнены, $y_1 - y_2 = 74{,}33 - 73{,}33 = 1{,}0$ см > 0. Предельный случай $x_0 = \frac{2}{3}\delta$: $y_1 - y_2 = \frac{3}{2}x_0 - \delta = 0$ — груз остаётся на месте, как и должно быть на границе окна. Размерность: $\frac{mg}{k}$ — $\frac{\text{Н}}{\text{Н/м}} = $ м.

Смысл: переход от последовательного соединения пружин к параллельному уменьшает растяжение вчетверо, и это перекрывает удлинение подвеса за счёт длинных нитей.

Ответ. Груз №4 ($m = 4{,}0$ кг); комплект пружин №1 ($k = 600$ Н/м, $L = 20$ см); комплект нитей №4 ($L_1 = 21$ см; $L_2 = 50$ см).