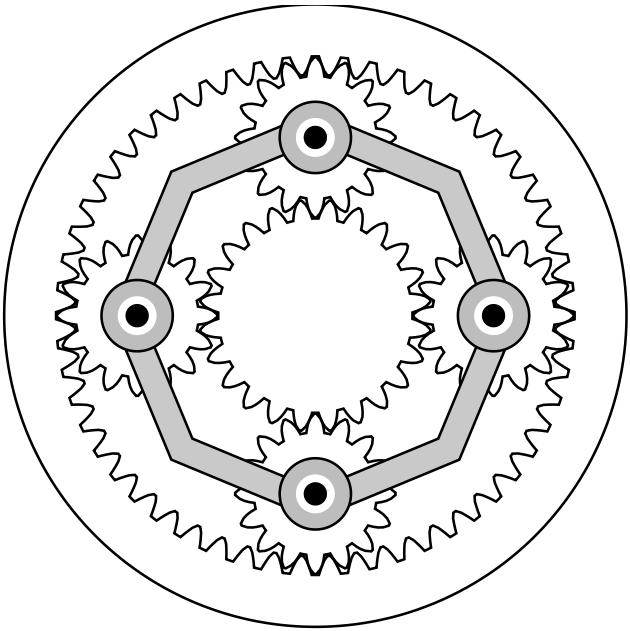
Планетарная передача

Задача 1. [МОШ 2021/22, 9 класс, задача 1] Внешняя шестерня планетарной передачи (см. приведённый ниже рисунок из «Википедии») называется коронной, внутренняя — солнечной, жёсткое подвижное звено, на котором закреплены оси маленьких планетарных шестерёнок, называется водилом.

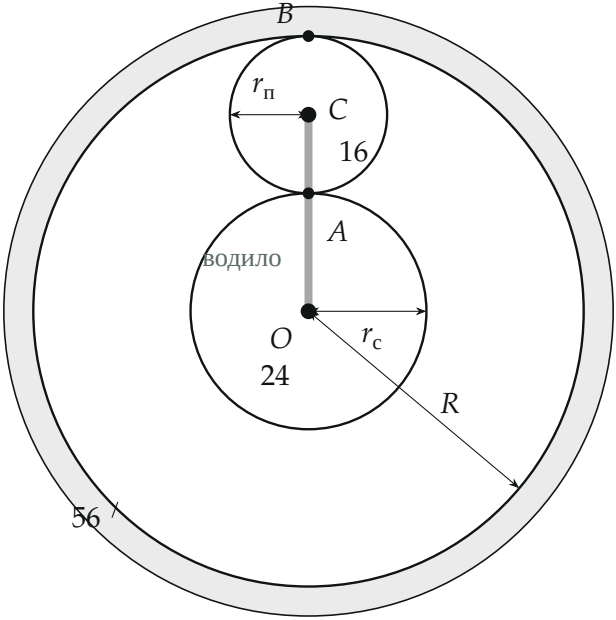


1. Если водило неподвижно, а солнечная шестерня вращается с частотой n оборотов в секунду, то с какой частотой вращается коронная шестерня?
2. Пусть солнечная и коронная шестерни вращаются в одну сторону, делая n и N оборотов в секунду соответственно. Чему равна частота вращения водила?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематику твёрдого тела: шестерни катятся друг по другу без проскальзывания. Главное условие

зацепления — в точке касания зубья двух шестерён движутся с одинаковой скоростью, иначе зубья ломались бы или выходили из зацепления. В пункте 1 оси всех шестерён неподвижны, и это условие сразу связывает частоты. В пункте 2 оси планетарных шестерёнок едут вместе с водилом; удобнее перейти в систему отсчёта водила — там снова все оси неподвижны, и работает ответ пункта 1.

Обозначения. Числа зубьев считаем по рисунку условия: у солнечной шестерни $z_с = 24$, у планетарной $z_п = 16$, у коронной (внутренние зубья) $z_к = 56$. Шаг зубьев у сцепленных шестерён одинаков, поэтому радиусы пропорциональны числам зубьев: $r_с : r_п : R = 24 : 16 : 56$. Проверка по рисунку: $R = r_с + 2r_п$, то есть $56 = 24 + 2 \cdot 16$ — планетарная шестерня точно заполняет зазор. A — точка касания солнечной и планетарной шестерён, B — планетарной и коронной, C — ось планетарной шестерни. Частота коронной шестерни в пункте 1 — N_A, частота водила в пункте 2 — N_B.



Шестерни заменены окружностями с радиусами, пропорциональными числам зубьев (24, 16, 56); показана одна планетарная шестерня из четырёх, остальные работают так же.

Пункт 1.

1. Скорость точки A**.** Солнечная шестерня делает n оборотов в секунду, её угловая скорость $\omega_{\text{с}} = 2\pi n$. Точка A лежит на её ободе, поэтому

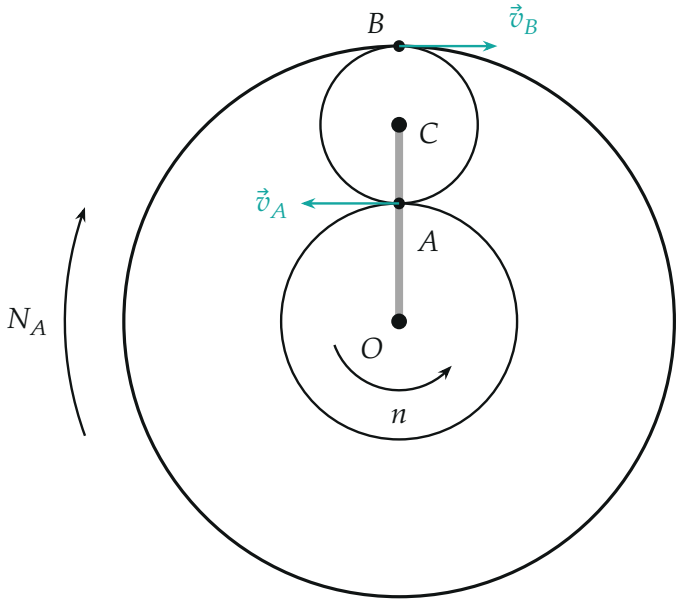
$$v_A = \omega_{\text{с}} r_{\text{с}} = 2\pi n\, r_{\text{с}}.$$

2. Планетарная шестерня. Водило неподвижно, значит, ось C стоит на месте, и шестерня просто вращается вокруг неё. Точки A и B лежат на концах её диаметра, на одном расстоянии $r_{\text{п}}$ от оси, поэтому их скорости равны по модулю и направлены в противоположные стороны: $v_B = v_A$.

3. Коронная шестерня. В точке B зубья планетарной и коронной шестерён движутся одинаково (условие зацепления): $2\pi N_A R = v_B = 2\pi n\, r_{\text{с}}$. Отсюда

$$N_A = n\,\frac{r_{\text{с}}}{R} = n\,\frac{z_{\text{с}}}{z_{\text{к}}} = n \cdot \frac{24}{56} = \frac{3n}{7}.$$

Знак: скорость точки B противоположна скорости точки A, поэтому коронная шестерня вращается *в обратную сторону* по сравнению с солнечной.



Пункт 1: ось C неподвижна. Скорость обода солнечной шестерни в точке A передаётся планетарной, та разворачивает её в точке B — коронная шестерня крутится в обратную сторону. Стрелки $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ одной длины.

Тот же ответ даёт подсчёт зубьев: за секунду через точку A проходит $24n$ зубьев солнечной шестерни, столько же зубьев планетарной и столько же — через точку B — зубьев коронной. Это $24n/56$ её оборота.

Пункт 2.

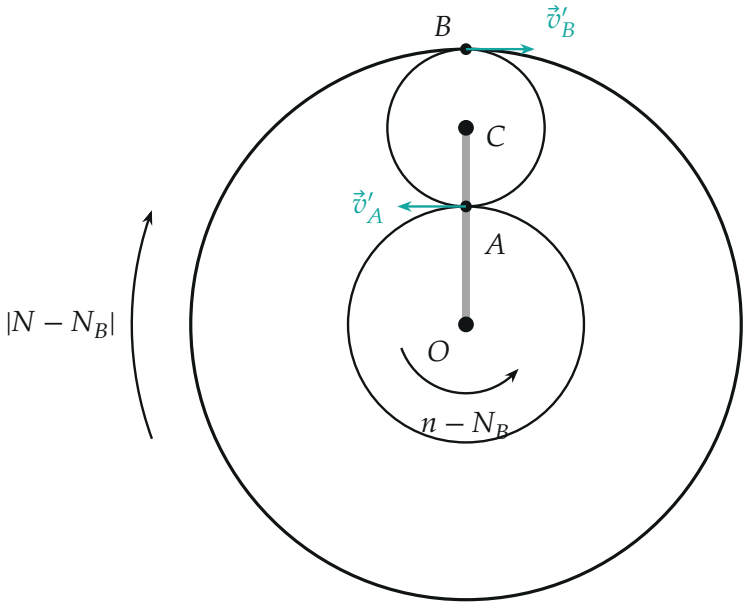
4. Переход в систему отсчёта водила. В системе отсчёта, вращающейся вместе с водилом с частотой N_B, водило покоится — это ровно ситуация пункта 1. Частоты вращения в этой системе получаются вычитанием (все вращения вокруг одной оси): солнечная шестерня делает $n - N_B$ оборотов в секунду, коронная $N - N_B$. По пункту 1 коронная крутится в обратную сторону с частотой в $3/7$ от частоты солнечной; со знаками (положительное направление — общее направление вращения солнечной и коронной шестерён):

$$N - N_B = -\frac{3}{7}\,(n - N_B).$$

5. Частота водила. Решаем линейное уравнение: $7N - 7N_B = -3n + 3N_B$, откуда

$$N_B = \frac{3n + 7N}{10} = \frac{z_c n + z_к N}{z_c + z_к}.$$

Знак: $N_B > 0$, то есть водило вращается в ту же сторону, что солнечная и коронная шестерни.



Пункт 2 в системе отсчёта водила (пример $N = n/2$, $N_B = 0{,}65\,n$): ось C покоится, солнечная шестерня крутится вперёд с частотой $0{,}35\,n$, коронная — назад с частотой $0{,}15\,n$; скорости точек A и B снова равны по модулю, как в пункте 1.

6. Второй способ — скорости точек планетарной шестерни. В лабораторной системе отсчёта планетарная шестерня — твёрдое тело, которое движется в своей плоскости. Скорости точек одного диаметра A–C–B (перпендикулярные ему) меняются вдоль него линейно, поэтому

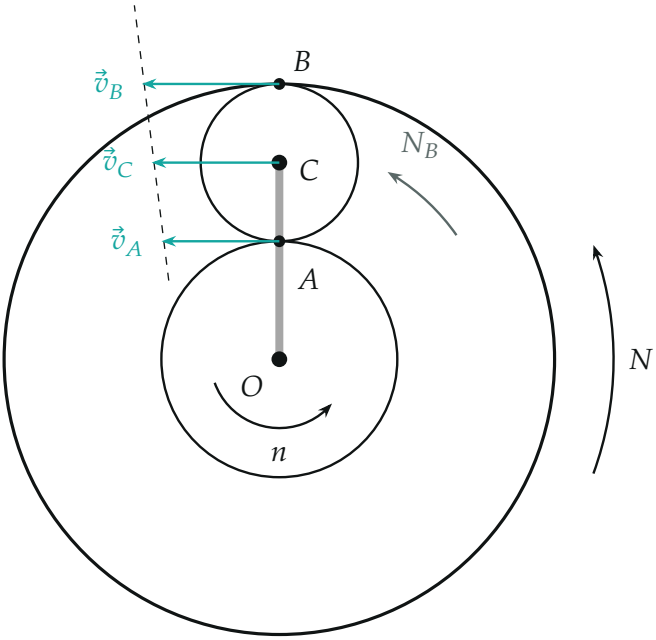
скорость середины C — среднее скоростей концов:

$$v_C = \frac{v_A + v_B}{2}, \qquad v_A = 2\pi n\, r_\text{с}, \quad v_B = 2\pi N R, \quad v_C = 2\pi N_B\,(r_\text{с} + r_\text{п}).$$

Точка C — ось на водиле, она движется по окружности радиуса $r_\text{с} + r_\text{п}$. Берём радиусы в половинах шага зубьев: $r_\text{с} = 12$, $r_\text{п} = 8$, $R = 28$, тогда $r_\text{с} + r_\text{п} = 20$:

$$20\, N_B = \frac{12\, n + 28\, N}{2} \quad \Rightarrow \quad N_B = \frac{3n + 7N}{10}.$$

Совпадает с пунктом 5.



Пункт 2 в лабораторной системе отсчёта (тот же пример $N = n/2$): скорости точек A, C, B пропорциональны $12n, 13n, 14n$; концы стрелок лежат на одной прямой, v_C — среднее v_A и v_B.

Обратите внимание. Частоты вращения складываются и вычитаются как числа только потому, что все оси параллельны. Переход в систему водила меняет частоты всех шестерён на одну и ту же величину N_B,

но не меняет условие зацепления — оно про относительное движение зубьев.

Проверка. Размерность: в ответах только частоты, коэффициенты безразмерны. Предельные случаи: при $N = n$ вся передача крутится как одно целое, и $N_B = \dfrac{3n + 7n}{10} = n$ — верно. При $N = 0$ (коронная заторможена) $N_B = 0{,}3\,n$: водило заметно медленнее солнечной шестерни — так планетарная передача и используется как редуктор. Подстановка $N = -\dfrac{3}{7}n$ (ответ пункта 1 со знаком) даёт $N_B = \dfrac{3n - 3n}{10} = 0$ — водило стоит, как в пункте 1.

Смысл: частота водила — среднее частот солнечной и коронной шестерён с весами, равными числам их зубьев.

Ответ. 1) $N_A = \dfrac{z_\text{с}}{z_\text{к}}\,n = \dfrac{3n}{7}$, коронная шестерня вращается в сторону, противоположную солнечной; 2) $N_B = \dfrac{3n + 7N}{10}$, в ту же сторону, что и шестерни.