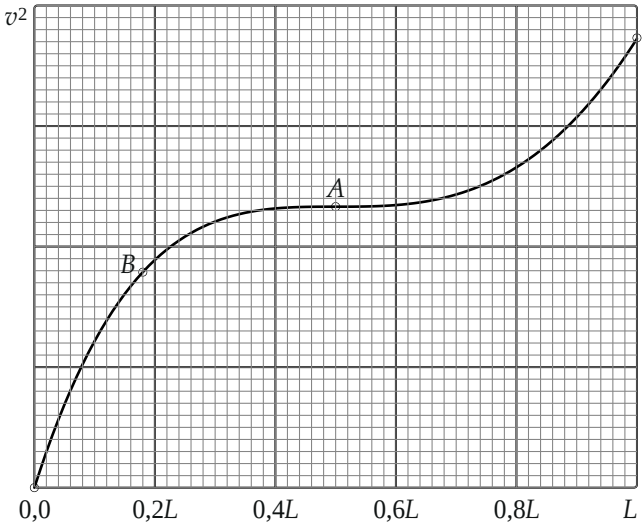
Падение аппарата

Задача 2. [МОШ 2021/22, 9 класс, задача 2] В поле тяжести Земли вниз по вертикали из состояния покоя движется летательный аппарат, на который кроме силы тяжести может действовать только подъёмная сила, создаваемая двигателем, направленная вертикально и сложным образом меняющаяся со временем. На рисунке представлен график зависимости квадрата скорости аппарата от пройденного расстояния на начальном участке его движения длиной L. Числовые значения цены деления сетки по каждой из осей неизвестны. В нулевой момент времени двигатель аппарата не работает. Известно, что если бы двигатель вообще не включался, то аппарат прошёл бы расстояние L за время, равное 7,75 с.



Можно считать, что на рассматриваемом участке ускорение свободного падения равно 10 м/с^2, а сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала.

Найдите скорость и ускорение аппарата при его движении с включённым двигателем в моменты времени, соответствующие точкам A и B графика.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на чтение графика: по зависимости $v^2(s)$ надо найти скорость и ускорение. Чисел на осях нет, поэтому сначала восстанавливаем масштаб. По горизонтали его даёт время свободного падения: без двигателя аппарат прошёл бы L за 7,75 с, отсюда L. По вертикали — начальный участок: в нулевой момент двигатель не работает, аппарат падает свободно, и там $v^2 = 2gs$. Ускорение связано с наклоном графика: на малом участке движение равноускоренное, $\Delta(v^2) = 2a\,\Delta s$, то есть ускорение равно половине тангенса угла наклона касательной.

Обозначения. s — пройденный путь (вниз); a — проекция ускорения на направление движения (вниз); c — цена крупного деления по оси v^2 (между толстыми линиями сетки); крупное деление по оси s — $0{,}2L$.

1. Длина участка L. Без двигателя аппарат падал бы из покоя с ускорением g: $L = \dfrac{gt^2}{2} = \dfrac{10 \cdot 7{,}75^2}{2}$ м $= 300$ м. Крупное деление по оси s: $0{,}2L = 60$ м.

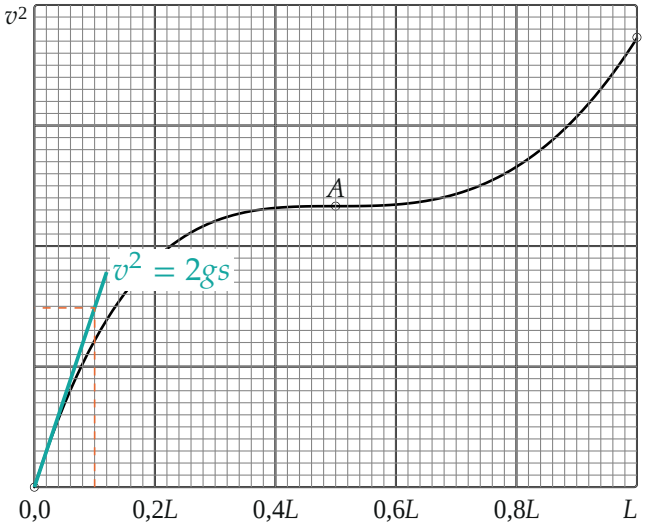
2. Ускорение и наклон графика. На малом участке Δs ускорение почти постоянно, и для равноускоренного движения $v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta s$. Значит,

$$a = \frac{\Delta(v^2)}{2\Delta s},$$

то есть ускорение пропорционально тангенсу угла наклона касательной к графику $v^2(s)$. Где касательная горизонтальна, $a = 0$; где график растёт — аппарат разгоняется вниз.

3. Цена деления по оси v^2. В начале двигатель не работает: $a = g$ и $v^2 = 2gs$. По графику касательная в начале координат поднимается на 1,49 крупного деления, пока s растёт на $0{,}1L = 30$ м (наклон $\approx 14{,}9$ крупных делений на L). На этом участке $v^2 = 2g \cdot 30 = 600$ м^2/с^2, поэтому

$$c = \frac{600}{1{,}49}\ \text{м}^2/\text{с}^2 \approx 400\ \text{м}^2/\text{с}^2.$$



Касательная в начале графика (бирюзой) — свободное падение $v^2 = 2gs$: при $s = 0{,}1L = 30$ м она проходит через 1,49 крупного деления, это 600 м^2/с^2.

4. Точка A**.** Она лежит при $s = 0{,}5L$ на высоте 2,33 крупного деления:

$$v_A^2 = 2{,}33 \cdot 400 = 932 \text{ м}^2/\text{с}^2, \qquad v_A \approx 30 \text{ м/с}.$$

Касательная в A горизонтальна (график там ровный), поэтому $a_A = 0$: подъёмная сила двигателя в этот момент равна силе тяжести.

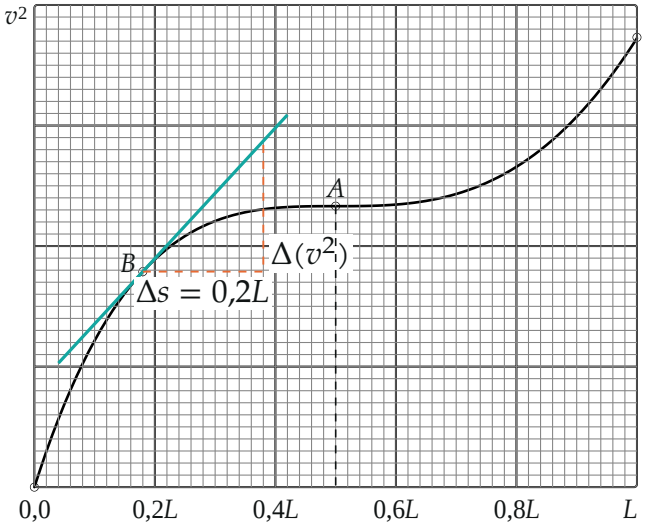
5. Точка B**.** При $s = 0{,}18L$ график на высоте 1,79 деления:

$$v_B^2 = 1{,}79 \cdot 400 = 715 \text{ м}^2/\text{с}^2, \qquad v_B \approx 27 \text{ м/с}.$$

Проведём касательную в B. На $\Delta s = 0{,}2L = 60$ м она поднимается на 1,08 деления, $\Delta(v^2) = 1{,}08 \cdot 400 = 434$ м^2/с^2:

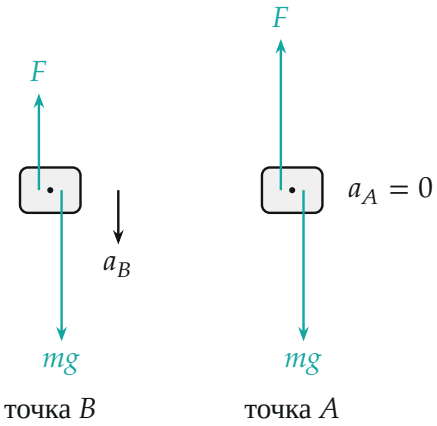
$$a_B = \frac{\Delta(v^2)}{2\Delta s} = \frac{434}{2 \cdot 60} \text{ м/с}^2 \approx 3{,}6 \text{ м/с}^2,$$

направлено вниз (скорость растёт).



Касательная в точке B и треугольник для её наклона: на $\Delta s = 0{,}2L$ подъём 1,08 крупного деления. В точке A касательная горизонтальна (пунктир — положение A).

6. Силы. По второму закону Ньютона в проекции на ось вниз: $mg - F = ma$, сила двигателя $F = m(g - a)$. В точке B: $F = 0{,}64\,mg$; в точке A: $F = mg$.



Силы на аппарат: в точке B тяга $F = 0{,}64\,mg$ и ускорение вниз, в точке A тяга уравновешивает тяжесть (длины стрелок по модулю).

Обратите внимание. Наклон графика $v^2(s)$ — это $2a$, а не a и не скорость. Точность ответа ограничена чтением графика (касательная проводится на глаз), поэтому ответы — с погрешностью около 10 %.

Ответ. $v_A = \sqrt{2{,}33\,c} \approx 30$ м/с, $a_A = 0$; $v_B = \sqrt{1{,}79\,c} \approx 27$ м/с, $a_B = \dfrac{c \cdot 1{,}08}{2 \cdot 0{,}2L} \approx 3{,}6$ м/с^2 (вниз), где $c = 400$ м^2/с^2, $L = 300$ м.

Проверка. Размерность $\frac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}} = \text{м/с}^2$. Ускорение в B меньше g, ведь двигатель уже включён и тормозит разгон, и больше нуля (в A оно равно нулю): между B и A наклон графика убывает до нуля — верно. Наклон по точкам графика (численно по кривой из PDF организаторов) 5,4 деления на L даёт $a_B = \frac{1}{2} \cdot 5{,}4 \cdot \frac{400}{300} = 3{,}6$ м/с^2 — то же.

Смысл: по графику $v^2(s)$ ускорение читается как половина наклона, а масштаб даёт участок свободного падения.

Ответ. $v_A \approx 30$ м/с, $a_A = 0$; $v_B \approx 27$ м/с, $a_B \approx 3{,}6$ м/с^2 (направлено вниз).