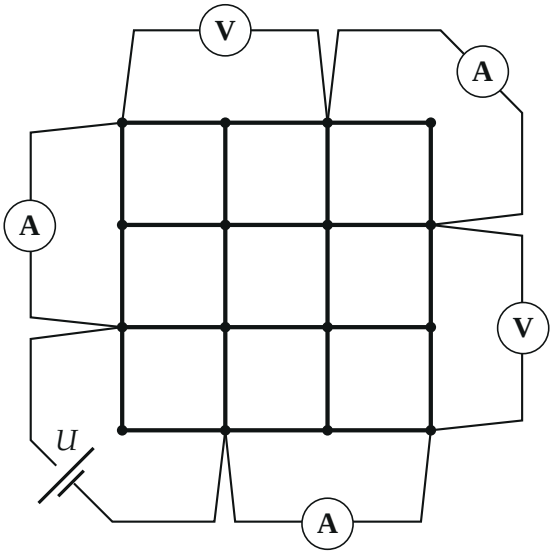
Опять приборы

Задача 3. [МОШ 2021/22, 9 класс, задача 3] В схеме, изображённой на рисунке, все приборы идеальные. Батарейка, напряжение между выводами которой равно $U = 6$ В, тоже идеальная. Сопротивление любого проводника, соединяющего соседние узлы сетки, равно 200 Ом. Сопротивление подводящих проводов, изображаемых тонкими линиями чёрного цвета, равно нулю. Найдите показания приборов.



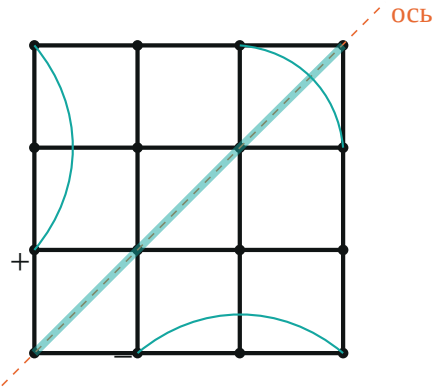
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на расчёт цепи с идеальными приборами. Идеальный амперметр имеет нулевое сопротивление — для расчёта это провод, соединяющий два узла в один (эквипотенциальный). Идеальный вольтметр имеет бесконечное сопротивление — ток через него не идёт, его можно убрать и потом просто взять разность потенциалов. После этого остаётся сетка резисторов, в которой узлы попарно замкнуты амперметрами. Ключ к расчёту — симметрия: схема переходит в себя при отражении относительно диагонали сетки, и потенциалы узлов на этой диагонали равны $U/2$. Это делит сетку на две одинаковые половины, и считать нужно только одну.

Обозначения. $R = 200$ Ом — сопротивление стороны клетки; узлы обозначаем (i, j): i — номер столбца слева направо, j — номер строки снизу вверх ($i, j = 0 \ldots 3$); φ_{ij} — потенциал узла, потенциал минуса батарейки принимаем за 0, плюса — за $U = 6$ В. По рисунку: батарейка включена между узлами $(0,1)$ и $(1,0)$; амперметры соединяют $(0,3)$ с $(0,1)$, $(2,3)$ с $(3,2)$ и $(1,0)$ с $(3,0)$; вольтметры подключены к $(0,3)$ и $(2,3)$ и к $(3,2)$ и $(3,0)$.

1. Симметрия. Отразим схему относительно диагонали, проходящей через узлы $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$. Узел (i,j) перейдёт в (j,i): батарейка $(0,1)$–$(1,0)$ перейдёт в себя с переменой полюсов, амперметр $(0,3)$–$(0,1)$ — в амперметр $(3,0)$–$(1,0)$, амперметр $(2,3)$–$(3,2)$ — в себя. Сетка резисторов тоже переходит в себя. Если поменять полюса батарейки, все потенциалы (отсчитанные от минуса) заменятся на $U - \varphi$. Значит,

$$\varphi_{ji} = U - \varphi_{ij},$$

и на самой диагонали ($i = j$) $\varphi = \dfrac{U}{2} = 3$ В. Узлы $(2,3)$ и $(3,2)$ соединены амперметром, их потенциалы равны и в сумме дают U, поэтому и они под 3 В.



Ось симметрии (красный пунктир) и узлы на ней (бирюзой) с потенциалом $U/2$. Бирюзовые дуги — амперметры: при отражении они переходят друг в друга (левый и нижний) или в себя.

2. Показания вольтметров. Левый верхний вольтметр подключён к узлу $(0,3)$ (через амперметр он соединён с плюсом, $\varphi = 6$ В) и к узлу $(2,3)$ (3 В). Правый — к узлу $(3,2)$ (3 В) и к $(3,0)$ (через амперметр соединён с минусом, 0). Оба показывают

$$U_V = 6 - 3 = 3 - 0 = 3 \text{ В}.$$

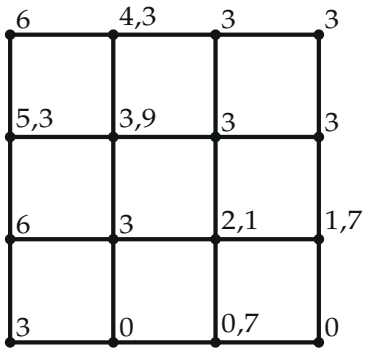
3. Потенциалы в верхней левой половине. Неизвестны три узла: $(0,2)$, $(1,2)$, $(1,3)$. Закон сохранения заряда (первое правило Кирхгофа) для каждого узла: сумма токов $\frac{\varphi_{\text{сосед}} - \varphi}{R}$ от соседей равна нулю, то есть потенциал узла — среднее потенциалов соседей:

$$\begin{aligned} 3\varphi_{02} &= \varphi_{01} + \varphi_{03} + \varphi_{12} = 12 + \varphi_{12}, \\ 3\varphi_{13} &= \varphi_{03} + \varphi_{23} + \varphi_{12} = 9 + \varphi_{12}, \\ 4\varphi_{12} &= \varphi_{02} + \varphi_{13} + \varphi_{11} + \varphi_{22} = \varphi_{02} + \varphi_{13} + 6. \end{aligned}$$

Из первых двух $\varphi_{02} = 4 + \frac{\varphi_{12}}{3}$, $\varphi_{13} = 3 + \frac{\varphi_{12}}{3}$; подставим в третье: $\frac{10}{3}\varphi_{12} = 13$, откуда

$$\varphi_{12} = 3{,}9 \text{ В}, \qquad \varphi_{02} = 5{,}3 \text{ В}, \qquad \varphi_{13} = 4{,}3 \text{ В}.$$

Нижняя правая половина — по симметрии: $\varphi_{21} = 6 - 3{,}9 = 2{,}1$ В, $\varphi_{20} = 0{,}7$ В, $\varphi_{31} = 1{,}7$ В.



Потенциалы всех узлов сетки в вольтах (минус батарейки — 0). Сумма потенциалов симметричных узлов равна 6 В.

4. Токи через амперметры. Ток через амперметр равен току, который узел на его конце отдаёт в сетку (через сам узел ток не копится).

Левый амперметр подводит ток к узлу $(0,3)$, и весь он уходит в сетку к соседям $(0,2)$ и $(1,3)$:

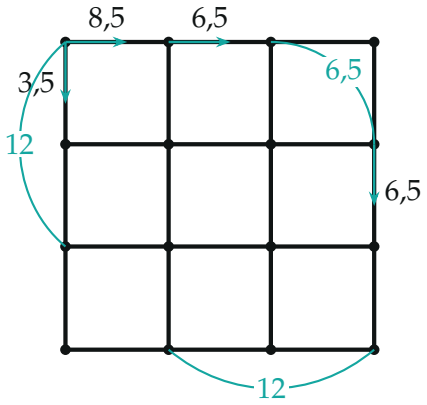
$$I_1 = \frac{6-5{,}3}{200} + \frac{6-4{,}3}{200} = \frac{2{,}4\ \text{В}}{200\ \text{Ом}} = 12\ \text{мА}.$$

Нижний амперметр по симметрии показывает столько же: $I_3 = 12$ мА.

Средний амперметр: в узел $(2,3)$ ток приходит только от $(1,3)$ (соседи $(3,3)$ и $(2,2)$ под тем же потенциалом 3 В), и весь он уходит через амперметр:

$$I_2 = \frac{4{,}3-3}{200} = \frac{1{,}3\ \text{В}}{200\ \text{Ом}} = 6{,}5\ \text{мА}.$$

Проверим с другого конца: из узла $(3,2)$ ток уходит только в $(3,1)$: $\frac{3-1{,}7}{200} = 6{,}5$ мА — то же.



Токи в миллиамперах: бирюзовые дуги — амперметры. Левый амперметр отдаёт в узел $(0,3)$ 12 мА, которые расходятся на 3,5 + 8,5 мА; средний переносит 6,5 мА из $(2,3)$ в $(3,2)$.

Обратите внимание. Амперметры не «измеряют ток в проводе рядом», а сами являются проводами: в узле с амперметром ток делится между ним и резисторами, поэтому показание надо считать по закону сохранения заряда для узла на конце амперметра.

Ответ. Амперметры: 12 мА, 6,5 мА и 12 мА; вольтметры: 3 В и 3 В.

Проверка. Численное решение всей сетки (метод узловых потенциалов, python) даёт те же потенциалы и токи; полный ток батарейки 45,5 мА. Для узла $(1,2)$: $\frac{(5{,}3-3{,}9)+(4{,}3-3{,}9)+(3-3{,}9)\cdot 2}{200} = 0$ — сохранение заряда выполнено. Размерность: В/Ом = А.

Смысл: симметрия сразу даёт показания вольтметров и сводит расчёт шестнадцати узлов к трём уравнениям.

Ответ. Амперметры показывают 12 мА, 6,5 мА и 12 мА; вольтметры — по 3 В.