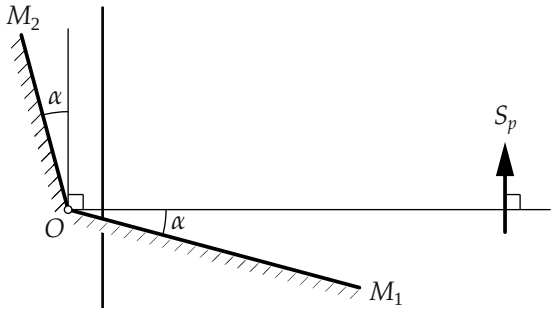
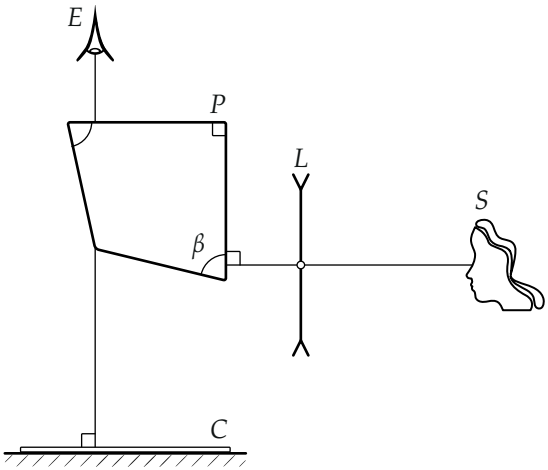
Камера-люцида

Задача 4. [МОШ 2021/22, 9 класс, задача 4]

1. Два плоских зеркала M_1O и M_2O образуют двугранный угол (см. рисунок), при этом плоскость зеркала M_1O составляет неизвестный угол α с горизонтальной прямой, а плоскость зеркала M_2O такой же угол α ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$) с вертикальной прямой. Найдите такое значение (или значения, если их несколько) угла α, что изображение плоского предмета S_p, располагающегося вертикально, лежит в горизонтальной плоскости.



2. На рисунке, приведённом ниже, изображена оптическая схема камеры-люциды — устройства, которое раньше применялось для перерисовывания предметов, людей, пейзажей с натуры. Размеры на схеме непропорционально изменены. Глаз рисовальщика обозначен буквой E, а перерисовываемый объект — буквой S.



В устройстве используется рассеивающая линза L, а также призма P из стекла с показателем преломления $n = \frac{3}{2}$, имеющая в сечении четырёхугольник с одним прямым углом и двумя одинаковыми острыми углами, равными β. Рисовальщик смотрит вертикально вниз на лист бумаги C (на котором рисует).

Считайте, что расстояние от линзы L до изображаемого объекта S значительно больше, чем расстояние между E и C. Линейные размеры призмы существенно меньше расстояния от L до S и расстояния от глаза рисовальщика до листа.

Объясните, как работает это устройство. Чему равен угол β призмы, которая использовалась в этом устройстве, по вашему мнению? Какую роль играет рассеивающая линза?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на плоские зеркала и полное внутреннее отражение. Главное свойство: два последовательных отражения от плоских зеркал, образующих угол φ, поворачивают изображение (и любой луч) на угол 2φ вокруг линии пересечения зеркал — без «зеркального» переворота. В пункте 1 нужен поворот вертикали в горизонталь, в пункте 2 призма работает как пара таких зеркал: две её грани отражают свет полностью и поворачивают горизонтальный пучок от объекта вертикально вверх, в глаз.

Обозначения. φ — угол между зеркалами; S', S'' — изображения по-

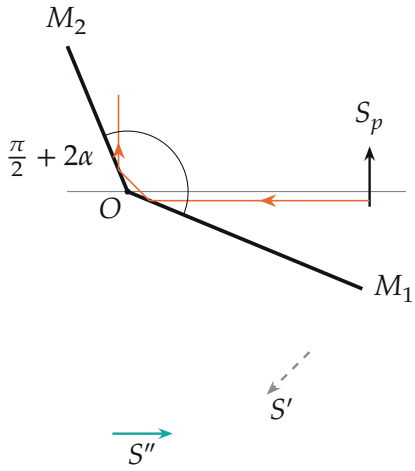
сле первого и второго отражения; $n = \frac{3}{2}$; $\alpha_{\text{пр}}$ — предельный угол полного отражения.

Пункт 1.

1. Угол между зеркалами. Зеркало M_1 отклонено от горизонтали вниз на α, зеркало M_2 — от вертикали влево на α. Угол между ними $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\alpha$.

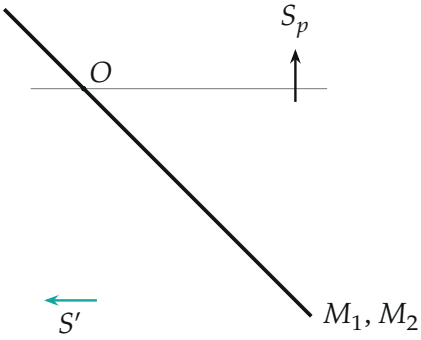
2. Поворот при двух отражениях. Отражение в зеркале, идущем под углом θ к горизонтали, переводит направление ψ в $2\theta - \psi$. Два отражения подряд (в M_1, затем в M_2): $\psi \to 2\theta_1 - \psi \to 2\theta_2 - 2\theta_1 + \psi$, то есть поворот на $2(\theta_2 - \theta_1) = 2\varphi = \pi + 4\alpha$. Вертикальный предмет даёт горизонтальное изображение, если поворот равен $\frac{\pi}{2}$ с точностью до π:

$$\pi + 4\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{8} \quad (\text{при } 0 \le \alpha \le \tfrac{\pi}{4}).$$



$\alpha = \frac{\pi}{8}$: предмет S_p, его изображение S' в зеркале M_1 (пунктир) и изображение S'' в зеркале M_2 — горизонтальное (повёрнуто на $\frac{3\pi}{2}$ вокруг O). Красный луч от предмета отражается дважды и уходит вертикально вверх.

3. Особый случай $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\varphi = \pi$: зеркала лежат в одной плоскости под углом 45° к горизонтали, это одно плоское зеркало, и свет отражается от него один раз. Отражение переводит вертикаль $\psi = \frac{\pi}{2}$ в $2 \cdot (-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{2} = -\pi$ — в горизонталь. Значит, подходит и $\alpha = \frac{\pi}{4}$.



$\alpha = \frac{\pi}{4}$: зеркала образуют одну плоскость под 45°; изображение S' вертикального предмета горизонтально.

Пункт 2.

4. Как идёт свет в призме. Свет от объекта (после линзы) идёт горизонтально и входит в вертикальную правую грань перпендикулярно — не преломляется. Затем он падает на нижнюю наклонную грань, отражается, падает на левую наклонную грань, отражается ещё раз и выходит через верхнюю горизонтальную грань перпендикулярно — вертикально вверх, в глаз. Эти две грани образуют тупой угол призмы и работают как пара зеркал. Чтобы горизонтальный луч стал вертикальным, нужен поворот на $\frac{\pi}{2}$ (или $\frac{3\pi}{2}$), то есть угол между гранями $\frac{\pi}{4}$ или $\frac{3\pi}{4}$; тупой угол призмы — $\frac{3\pi}{4} = 135°$.

5. Угол β. Сумма углов четырёхугольника 2π:

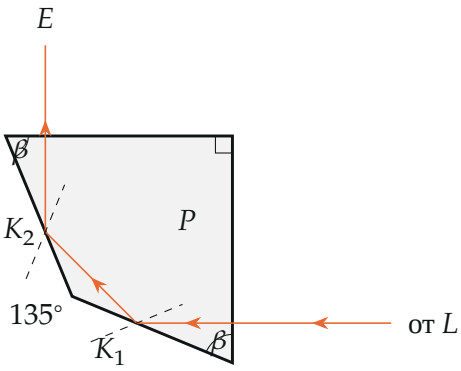
$$\frac{\pi}{2} + 2\beta + \frac{3\pi}{4} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{3\pi}{8} = 67{,}5°.$$

6. Полное отражение. Нижняя грань наклонена к горизонтали на $\frac{\pi}{2} - \beta = 22{,}5°$, и горизонтальный луч падает на неё под углом 67,5° к нормали. После отражения луч идёт под 45° вверх-влево и падает на левую грань тоже под углом 67,5°. Предельный угол

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}, \qquad \alpha_{\text{пр}} = 41{,}8° < 67{,}5°,$$

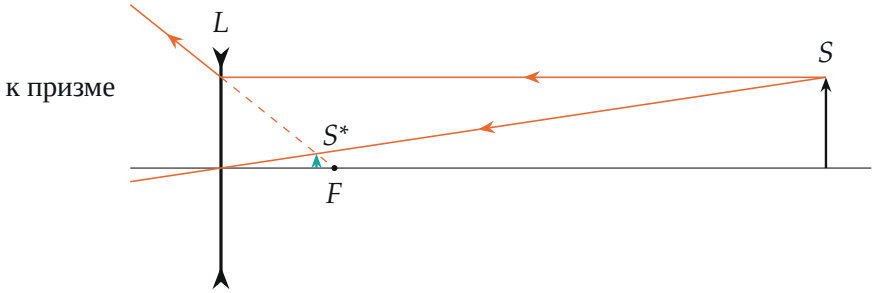
поэтому на обеих гранях отражение полное, без потерь, серебрить грани

не нужно.



Ход луча в призме при $\beta = 67{,}5°$ (координаты вычислены): вход по нормали, полное отражение в точках K_1 и K_2 (нормали — пунктир), выход вертикально вверх к глазу E.

7. Как работает камера-люцида и зачем линза. Глаз стоит над краем призмы так, что половина зрачка смотрит в призму, а половина — мимо неё, прямо на лист C. Через призму глаз видит объект S так, будто он лежит внизу, в плоскости листа: два отражения поворачивают картину на 90° и не переворачивают её зеркально. Рисовальщик видит одновременно изображение и свой карандаш и обводит изображение. Объект далеко, лист близко, и глаз не может одновременно навести резкость на оба. Рассеивающая линза даёт уменьшенное мнимое прямое изображение S^* далёкого объекта почти в своей фокальной плоскости, то есть близко; подобрав фокусное расстояние, его ставят на том же расстоянии от глаза, что и лист. Тогда изображение и бумага резкие одновременно и не смещаются друг относительно друга при движении головы.



Рассеивающая линза: далёкий предмет S даёт мнимое уменьшенное изображение S^* вблизи фокуса F (пунктир — продолжение луча). Масштаб условный; лучи посчитаны по формуле линзы для $d = 8, f = -1{,}5$ (в клетках рисунка).

Обратите внимание. В пункте 1 нужны оба значения: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ не следует из формулы поворота, потому что зеркала сливаются в одно и отражение одно. Грани призмы не посеребрены: работают благодаря полному внутреннему отражению, поэтому важно проверить, что углы падения больше предельного.

Ответ. 1) $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$; 2) $\beta = \frac{3\pi}{8}$; грани тупого угла призмы отражают свет полностью и поворачивают его на $\frac{\pi}{2}$, и глаз видит изображение объекта в плоскости листа; рассеивающая линза даёт уменьшенное мнимое изображение далёкого объекта вблизи своей фокальной плоскости, чтобы оно было на том же расстоянии, что и лист.

Проверка. При $\alpha = \frac{\pi}{8}$ поворот $\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ — горизонталь; численное отражение точек предмета (python) дало горизонтальное S''. В призме угол при четвёртой вершине по координатам равен 135°, а прослеженный луч выходит строго вертикально.

Смысл: пара зеркал — это поворот на удвоенный угол между ними, и камера-люцида использует его, чтобы «положить» вид на лист бумаги.

Ответ. 1) $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$; 2) $\beta = \frac{3\pi}{8}$; две грани тупого угла призмы полным внутренним отражением поворачивают свет на $\frac{\pi}{2}$, и рисовальщик видит изображение в плоскости листа; рассеивающая линза создаёт уменьшенное мнимое изображение предмета вблизи своей фокальной плоскости.