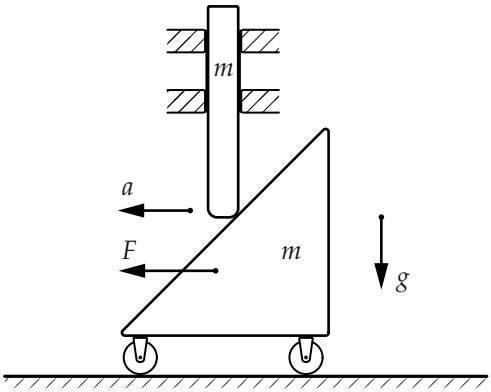
Клин и стержень

Задача 5. [МОШ 2021/22, 9 класс, задача 5] Верхняя грань клина массой $m = 3$ кг составляет угол $\alpha = 45°$ с горизонтом. Клин снабжен лёгкими колесиками и стоит на горизонтальной поверхности (см. рисунок). Стержень массой m, расположенный вертикально, может двигаться только вверх-вниз вдоль вертикальных направляющих, не испытывая трения. Между стержнем и клином имеется трение, характеризующееся неизвестным коэффициентом μ. Если на клин действуют горизонтальной силой $F = 102$ Н (как показано на рисунке), то клин и стержень движутся так, что касаются друг друга; ускорение клина сонаправлено силе и равно $a = 1$ м/с^2. Ускорение свободного падения g считайте равным 10 м/с^2.



1. Найдите коэффициент трения μ.
2. Какую горизонтальную силу F_1 нужно прикладывать к клину, чтобы он двигался с ускорением a в противоположную сторону?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на динамику двух тел, связанных контактом (кинематическая связь), с трением скольжения. Стержень может двигаться только по вертикали, клин — только по горизонтали, и пока они касаются, их перемещения связаны геометрией грани: при угле 45° ускорения равны по модулю. Сила, с которой клин действует на стержень, складывается из нормальной реакции N (перпендикулярно грани) и силы трения скольжения μN (вдоль грани, против

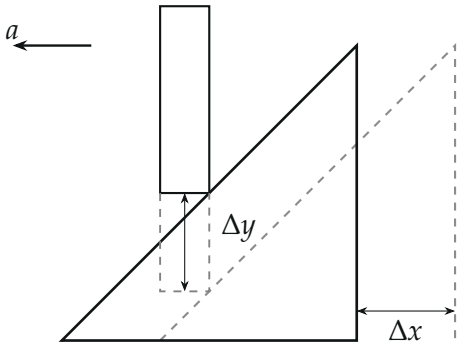
скольжения стержня относительно клина). Направление скольжения в пунктах 1 и 2 разное, поэтому сила трения разворачивается — в этом весь смысл второго пункта. Для каждого тела пишем второй закон Ньютона в проекции на ту ось, по которой оно может двигаться: для стержня — на вертикаль, для клина — на горизонталь. Так в уравнения не входят силы направляющих и опоры.

Обозначения. $m = 3$ кг — масса клина и стержня; $\alpha = 45°$; N — сила нормальной реакции грани клина на стержень; $F_{\text{тр}} = \mu N$ — сила трения скольжения; C — точка касания; ось x направим влево (по силе F), ось y — вверх.

1. Связь ускорений. Сдвинем клин на Δx влево. Под точку касания придёт часть грани, которая выше на $\Delta x \operatorname{tg}\alpha$, и стержень поднимется на столько же:

$$\Delta y = \Delta x \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad a_{\text{ст}} = a \operatorname{tg}\alpha = a.$$

Клин едет влево — стержень поднимается; клин едет вправо — стержень опускается. Относительно клина стержень скользит вдоль грани: в первом случае вверх по грани (вправо-вверх), во втором — вниз.

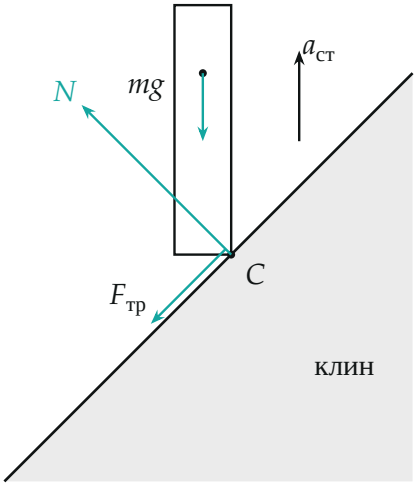


Кинематическая связь: клин сдвинулся влево на Δx (пунктир — прежнее положение), стержень поднялся на $\Delta y = \Delta x \operatorname{tg} 45° = \Delta x$.

Пункт 1.

2. Силы, действующие на стержень. Сила тяжести mg вниз; нормальная реакция N перпендикулярно грани, вверх-влево; сила трения μN вдоль грани против скольжения стержня относительно клина, то

есть вниз-влево; силы направляющих горизонтальны. Ускорение стержня a направлено вверх.



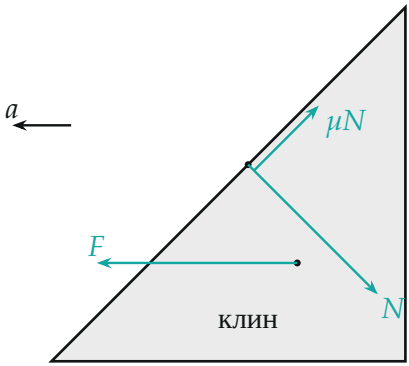
Пункт 1: силы на стержень в точке касания C (длины стрелок по модулю: $N = 93$ Н, $\mu N = 47$ Н, $mg = 30$ Н). Стержень скользит относительно клина вверх по грани, трение направлено вниз по грани.

3. Второй закон Ньютона для стержня в проекции на ось y. Нормаль к грани составляет с вертикалью угол α, трение направлено вдоль грани под углом α к горизонтали вниз:

$$N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha - mg = ma \quad \Rightarrow \quad \frac{N(1-\mu)}{\sqrt{2}} = m(g+a) = 33\text{ Н}.$$

4. Второй закон Ньютона для клина в проекции на ось x. По третьему закону Ньютона стержень давит на клин силой N вниз-вправо и тянет его трением μN вверх-вправо. Горизонтальные составляющие обеих сил направлены вправо, против F:

$$F - N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha = ma \quad \Rightarrow \quad \frac{N(1+\mu)}{\sqrt{2}} = F - ma = 102 - 3 = 99\text{ Н}.$$



Пункт 1: горизонтальные силы на клин. Стержень давит на грань (N) и тянет её трением (μN) в сторону, противоположную F; $F = 102$ Н в том же масштабе.

5. Коэффициент трения. Делим уравнение шага 4 на уравнение шага 3:

$$\frac{1+\mu}{1-\mu} = \frac{99}{33} = 3 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2}, \qquad \frac{N}{\sqrt{2}} = 66 \text{ Н}.$$

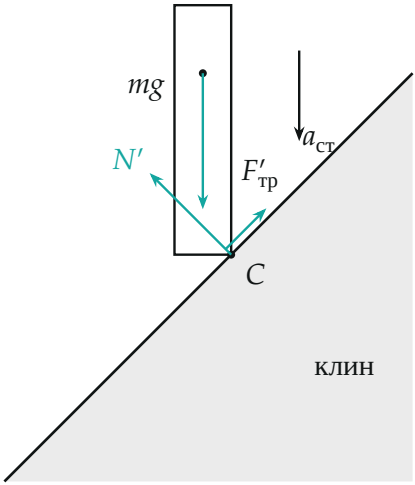
Пункт 2.

6. Клин едет вправо. Теперь клин движется вправо с ускорением a, стержень опускается с ускорением a (шаг 1). Относительно клина стержень скользит вниз по грани, и сила трения на стержень разворачивается: вверх по грани. Второй закон Ньютона для стержня в проекции на ось y (ускорение $-a$):

$$N' \cos\alpha + \mu N' \sin\alpha - mg = -ma \quad \Rightarrow \quad \frac{N'(1+\mu)}{\sqrt{2}} = m(g-a) = 27 \text{ Н},$$

$$\frac{N'}{\sqrt{2}} = \frac{27 \text{ Н}}{1{,}5} = 18 \text{ Н}.$$

$N' > 0$ — стержень и клин действительно остаются в контакте.

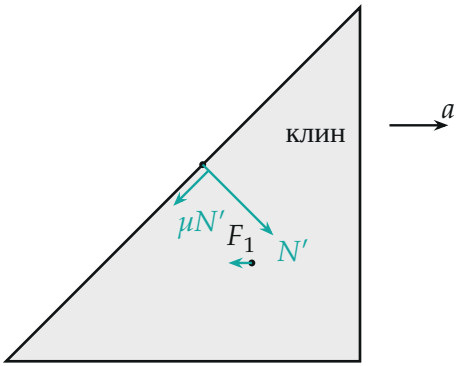


Пункт 2: силы на стержень (масштаб вдвое крупнее, чем в пункте 1: $N' = 25$ Н, $\mu N' = 13$ Н, $mg = 30$ Н). Стержень скользит относительно клина вниз по грани, трение направлено вверх по грани; стержень опускается с ускорением a.

7. Сила на клин. Ось x' направим вправо, по ускорению клина. Стержень давит на грань силой N' вниз-вправо (горизонтальная составляющая $\frac{N'}{\sqrt{2}}$ вправо), а сила трения на клин противоположна силе трения на стержень: вниз по грани, её горизонтальная составляющая $\frac{\mu N'}{\sqrt{2}}$ влево. Пусть искомая сила F_1 направлена вправо (знак покажет):

$$F_1 + \frac{N'}{\sqrt{2}} - \frac{\mu N'}{\sqrt{2}} = ma \quad \Rightarrow \quad F_1 = ma - \frac{N'(1-\mu)}{\sqrt{2}} = 3 - 18 \cdot \frac{1}{2} = -6 \text{ Н}.$$

Минус означает, что сила F_1 направлена влево — туда же, куда и F в первом пункте. Стержень, соскальзывая, сам толкает клин вправо с силой 9 Н, а для ускорения 1 м/с^2 клину нужно лишь 3 Н, поэтому клин приходится придерживать силой 6 Н.



Пункт 2: силы на клин в масштабе пункта 2 ($N' = 25$ Н, $\mu N' = 13$ Н, $F_1 = 6$ Н). Сумма горизонтальных составляющих $\frac{N'}{\sqrt{2}} - \frac{\mu N'}{\sqrt{2}} = 9$ Н вправо больше нужных $ma = 3$ Н, поэтому F_1 направлена влево.

Обратите внимание. Сила трения меняет направление вместе с направлением скольжения стержня относительно клина — поэтому в пунктах 1 и 2 множители $(1 - \mu)$ и $(1 + \mu)$ меняются местами. Сила F_1 по модулю 6 Н, но приложена в ту же сторону, что и F (против движения клина).

Ответ.

$$\mu = \frac{F - ma - m(g + a)}{F - ma + m(g + a)} = \frac{99 - 33}{99 + 33} = \frac{1}{2},$$

$$F_1 = ma - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} m(g - a) = 3 - \frac{1}{3} \cdot 27 = -6 \text{ Н},$$

то есть 6 Н, направленная противоположно ускорению клина.

Проверка. Подставим $\mu = \frac{1}{2}$, $\frac{N}{\sqrt{2}} = 66$ Н в пункт 1: стержень $66 \cdot \frac{1}{2} - 30 = 3 = ma$ — верно; клин $102 - 66 \cdot \frac{3}{2} = 3 = ma$ — верно. Предел $\mu = 0$ в пункте 2: $F_1 = ma - m(g - a) = 3 - 27 = -24$ Н — без трения стержень толкал бы клин ещё сильнее. Размерности всех слагаемых — ньютоны.

Ответ. 1) $\mu = \frac{1}{2}$; 2) $F_1 = 6$ Н (направлена против ускорения клина, то есть так же, как сила F в пункте 1).