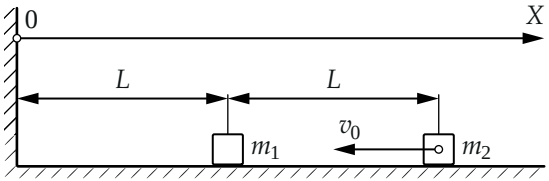
Казалось бы, при чём здесь π?

Задача 1. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 10 класс, задача 1] На гладком горизонтальном столе покоятся два маленьких бруска, массы которых равны $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 10^N$ кг, где N — некоторая константа. В момент времени $t = 0$ второму бруску сообщают скорость v_0 (см. рисунок). Столкновения брусков друг с другом и со стенкой в процессе дальнейшего движения считаются абсолютно упругими.



Пусть ось OX направлена вправо, координата стенки равна нулю. Проследим за движением брусков, рассмотрев зависимость $x_2(x_1)$ — координаты второго бруска в некоторый момент времени от координаты первого в тот же момент. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2, соответствует точка M с координатами (x_1, x_2). Со временем координаты брусков изменяются, а точка M движется по плоскости X_1OX_2.

a) Найдите скорость точки M в момент, когда проекции скоростей брусков на ось OX равны v_1 и v_2 соответственно. Какой угол составляет вектор скорости точки M с осью OX_1? Нарисуйте траекторию движения точки M по плоскости X_1OX_2 для значений масс $m_1 = m_2 = 1$ кг ($N = 0$).

Введём в рассмотрение координаты $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, связанные с координатами (x_1, x_2) формулами $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1}\, x_1$ и $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2}\, x_2$. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2, соответствует точка $\tilde{M}$ с координатами $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ на плоскости $\tilde{X}_1O\tilde{X}_2$.

b) Воспользовавшись законом сохранения энергии, покажите, что величина скорости точки $\tilde{M}$ сохраняется при абсолютно упругом ударе брусков.

Пусть за мгновение перед столкновением брусков острый угол между прямой, задаваемой уравнением $\tilde{x}_2 = \dfrac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}\tilde{x}_1$, и скоростью точки $\tilde{M}$ равен α. Используя законы сохранения импульса и энергии, докажите, что после столкновения брусков острый угол между прямой $\tilde{x}_2 = \dfrac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}\tilde{x}_1$ и скоростью точки $\tilde{M}$ также равен α.

c) На каком расстоянии от стенки произойдёт пятое столкновение брусков, если параметр N равен 2?

d) Сколько раз столкнётся брусок массой m_1 с бруском массой m_2 и стенкой при $N = 4$?

Указание. Может оказаться полезной приближённая формула $\operatorname{tg} x \approx \sin x \approx x$, справедливая при малых x ($x \ll 1$).

▲ **Решение. Что происходит.** Два бруска на прямой — это одна точка на плоскости (x_1, x_2). Пока бруски летят свободно, точка движется прямолинейно и равномерно; удар — это излом траектории на прямой $x_2 = x_1$ (бруски вместе) или на оси x_2 ($x_1 = 0$, брусок у стенки). Главная идея: в «растянутых» координатах $\tilde{x}_i = \sqrt{m_i}x_i$ энергия — это квадрат длины скорости, а импульс — её проекция на прямую столкновения. Поэтому оба вида ударов — зеркальные отражения, и движение системы — путь светового луча между двумя зеркалами, образующими угол. Отражения в угле считаются «разворачиванием» угла: луч идёт по прямой.

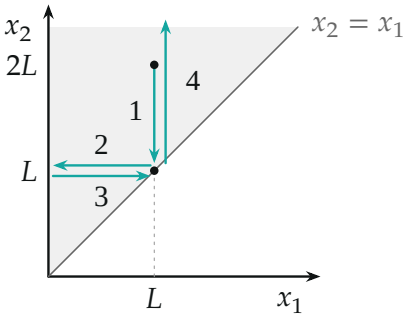
Обозначения. Брусок 1 — между стенкой и бруском 2, поэтому $0 \le x_1 \le x_2$. Начальное положение $x_1 = L$, $x_2 = 2L$, скорости $v_1 = 0$, $v_2 = -v_0$. Угол θ между осью $O\tilde{X}_2$ (стенка) и прямой столкновения $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2/m_1}\,\tilde{x}_1$: $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{m_1/m_2}$.

Пункт а). Координаты точки M — координаты брусков, поэтому её скорость — вектор (v_1, v_2):

$$v_M = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{v_2}{v_1},$$

φ — угол с осью OX_1 (знаки v_1, v_2 указывают четверть). Траектория при $N = 0$. Удар одинаковых брусков — обмен скоростями, удар о стенку

— смена знака v_1. Поэтому: M идёт из $(L, 2L)$ вниз до (L, L) (брусок 2 доехал до бруска 1); после обмена влево до $(0, L)$ (брусок 1 у стенки); обратно вправо до (L, L); после второго обмена — вверх по прямой $x_1 = L$ (брусок 2 уходит со скоростью v_0, брусок 1 стоит). Всего три удара.



Траектория точки M при $m_1 = m_2$: участки 1–4 по порядку (2 и 3 проходят по одной прямой, нарисованы раздвинутыми). Серая область $x_2 \geq x_1 \geq 0$ — допустимые положения.

Пункт b). Скорость точки $\tilde{M}$: $\tilde{v} = (\sqrt{m_1}v_1,\ \sqrt{m_2}v_2)$.

Модуль. Кинетическая энергия брусков

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2}{2} = \frac{|\tilde{v}|^2}{2}.$$

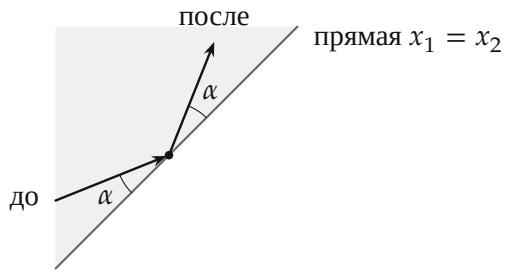
При абсолютно упругом ударе энергия сохраняется, значит, сохраняется и $|\tilde{v}|$.

Угол. Импульс системы при ударе брусков сохраняется (стол гладкий, стенка в этот момент не участвует):

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2 = \sqrt{m_1}\,\tilde{v}_1 + \sqrt{m_2}\,\tilde{v}_2 = \vec{\tilde{v}} \cdot \vec{n}, \qquad \vec{n} = (\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}).$$

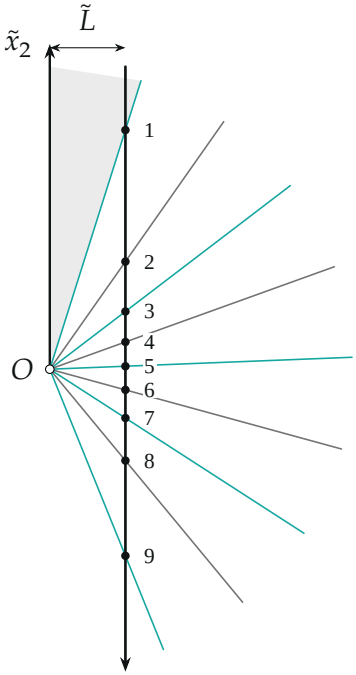
Вектор $\vec{n}$ направлен вдоль прямой $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2/m_1}\,\tilde{x}_1$, поэтому $p/|\vec{n}|$ — проекция $\tilde{v}$ на эту прямую. Она сохраняется, модуль тоже — значит, сохраняется и модуль поперечной составляющей. Поперечная составляющая меняет знак (до удара бруски сближались, после — расходятся, точка $\tilde{M}$ уходит от прямой обратно в допустимую область). Это и есть

зеркальное отражение от прямой: острый угол α с прямой до и после удара одинаков. Удар о стенку меняет только знак $\tilde{v}_1$ — зеркальное отражение от оси $O\tilde{X}_2$.



Удар брусков на плоскости $\tilde{X}_1 O\tilde{X}_2$: составляющая скорости вдоль прямой (импульс) и модуль (энергия) не меняются — луч отражается от прямой, как от зеркала.

Пункт c). Допустимая область на плоскости $\tilde{X}_1 O\tilde{X}_2$ — угол раствора θ между осью $O\tilde{X}_2$ и прямой столкновения ($\operatorname{tg}\theta = \sqrt{m_1/m_2}$). Луч в зеркальном угле удобно «разворачивать»: вместо отражения отражаем сам угол, и луч идёт прямо. Копии зеркал — лучи из O под углами $\theta, 2\theta, 3\theta, \ldots$ к оси $O\tilde{X}_2$: нечётные — удары брусков, чётные — удары о стенку.



Развёрнутый угол для примера $m_2 = 10m_1$ ($\theta \approx 17{,}5°$): луч $\tilde{M}$ идёт прямо, пересечения с копиями зеркал (бирюзовые — удары брусков, серые — о стенку) пронумерованы. Десятое пересечение — далеко внизу, за краем рисунка; одиннадцатого нет: $11\theta > 180°$.

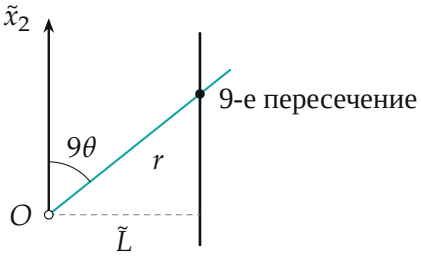
Вначале $v_1 = 0$: луч идёт параллельно оси $O\tilde{X}_2$ на расстоянии $\tilde{L} = \sqrt{m_1}L$ от неё. Пересечение с копией зеркала под углом ψ лежит на расстоянии $r = \tilde{L}/\sin\psi$ от O. Расстояние от O при отражении сохраняется, поэтому и в реальном угле удар случается на расстоянии r от O. Удар брусков — на прямой $x_1 = x_2$, где $r = \sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2} = x_1\sqrt{m_1 + m_2}$. Пятый удар брусков — девятое пересечение, $\psi = 9\theta$:

$$x_1 = \frac{r}{\sqrt{m_1 + m_2}} = \frac{\sqrt{m_1}\,L}{\sqrt{m_1 + m_2}\,\sin 9\theta} = \frac{L\sin\theta}{\sin 9\theta}.$$

(Первый удар, $\psi = \theta$, даёт $x_1 = L$ — верно.) При $N = 2$: $\theta = \operatorname{arctg} 0{,}1 =$

$0{,}0997$, $9\theta = 0{,}897$:

$$x_5 = \frac{0{,}0995}{0{,}781} L \approx 0{,}13\,L.$$



Пятый удар брусков ($N = 2$): $r = \tilde{L}/\sin 9\theta$, и в реальном угле он на том же расстоянии r от O.

Пункт d). Каждое пересечение развёрнутого луча с копией зеркала — один удар (брусков или о стенку). Луч, параллельный оси $O\tilde{X}_2$, пересекает все лучи из O с углами $\psi = k\theta < \pi$ и только их. Значит, число ударов — наибольшее k с $k\theta < \pi$. При $N = 4$: $\theta = \operatorname{arctg} 0{,}01 \approx 0{,}01$ (по указанию $\operatorname{tg} x \approx x$), $\pi/\theta \approx 314{,}16$:

$$k_{\max} = 314.$$

Отсюда и название задачи: число ударов при $m_2 = 100^n m_1$ — первые цифры числа π.

Обратите внимание: учитывать нужно и удары о стенку — чётные копии зеркал. Без них угол не развернуть, и подсчёт сломается.

Проверка. Прямой численный расчёт ударов (python): при $N = 0$ — 3 удара (как в пункте a), при $N = 2$ — 31, при $N = 4$ — 314; пятый удар брусков при $N = 2$ — при $x_1 = 0{,}1273\,L$, совпадает с $L\sin\theta/\sin 9\theta$. Предел: при $m_1 = m_2$ угол $\theta = 45°$, $\pi/\theta = 4$, и ударов 3 ($3\theta < \pi$, $4\theta = \pi$ — луч уходит параллельно последнему зеркалу).

Ответ. a) $v_M = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = v_2/v_1$; траектория при $N = 0$ — на рисунке (три удара); b) $|\tilde{v}|^2 = 2E$ и проекция $\tilde{v}$ на прямую столкновения пропорциональна импульсу — удар есть зеркальное отражение; c) $x_5 = \dfrac{L\sin\theta}{\sin 9\theta} \approx 0{,}13\,L$, $\operatorname{tg}\theta = 0{,}1$; d) 314.