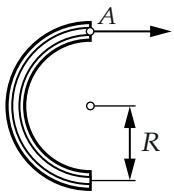
Тянут канат

Задача 2. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 10 класс, задача 2] Внутри закреплённой горизонтальной тонкой трубки, изогнутой в форме полуокружности радиуса R, расположен однородный гибкий канат длиной πR, масса которого равна m. Канат начинают тянуть за свободный конец A, прикладывая силу по касательной, как показано на рисунке.



Чему равна и куда направлена суммарная сила реакции трубки, действующая на канат, если ускорение точки A каната равно a? Считайте внутренние стенки трубки гладкими, а канат нерастяжимым. Рассмотрите начальный момент времени, когда скорость каната равна нулю. Силой тяжести можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Канат нерастяжим и целиком лежит в трубке, поэтому все его точки движутся по полуокружности с одной и той же по модулю скоростью и одним касательным ускорением a. В начальный момент скорость равна нулю, центростремительного ускорения нет: ускорение каждого кусочка направлено по касательной. Главная идея — теорема о движении центра масс: сумма внешних сил (рука и трубка) равна $m\vec{a}_{\text{цм}}$. Ускорение центра масс найдём сложением ускорений малых кусочков каната.

Обозначения. Центр полуокружности O, ось x — вдоль силы $\vec{F}$ в точке A (вправо), ось y — вдоль диаметра от нижнего конца каната B к A (вверх). $\vec{N}$ — суммарная сила реакции трубки, $\lambda = \dfrac{m}{\pi R}$ — масса единицы длины.

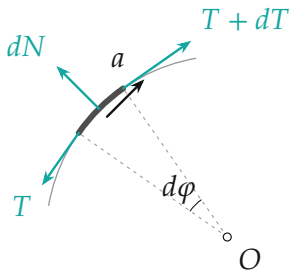
1. Сила, приложенная к концу A. Разобьём канат на малые кусочки длины dl. Запишем второй закон Ньютона для кусочка в проекции на

касательную: реакция гладкой трубки перпендикулярна стенке и в эту проекцию не входит, остаётся разность натяжений:

$$dT = \lambda\, dl \cdot a.$$

На свободном конце B натяжение равно нулю, поэтому на расстоянии l от B натяжение $T(l) = \lambda a l$, а на конце A ($l = \pi R$):

$$F = T(\pi R) = \lambda a \cdot \pi R = ma.$$



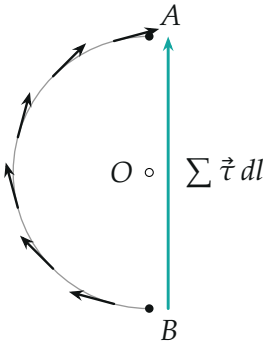
Кусочек каната: натяжения по касательным, реакция трубки dN по радиусу, ускорение a по касательной (центростремительного нет, $v = 0$).

2. Ускорение центра масс. Ускорение центра масс — среднее ускорений кусочков по массе:

$$\vec{a}_{\text{цм}} = \frac{1}{m}\sum \lambda\, dl\, \vec{a}_i = \frac{a}{\pi R}\sum \vec{\tau}_i\, dl.$$

Здесь $\vec{\tau}_i$ — единичный вектор касательной по направлению движения. Сумма $\vec{\tau}\, dl$ — это сумма малых перемещений вдоль дуги, то есть вектор, соединяющий концы дуги: от B к A, длины $2R$, вдоль оси y:

$$\vec{a}_{\text{цм}} = \frac{a}{\pi R} \cdot 2R\, \vec{e}_y, \qquad a_{\text{цм}} = \frac{2a}{\pi}.$$



Ускорения кусочков направлены по касательной; сложенные «цепочкой», малые перемещения вдоль дуги дают хорду BA длины $2R$.

3. Сила реакции. Теорема о движении центра масс каната (внешние силы — $\vec{F}$ и $\vec{N}$):

$$\vec{F} + \vec{N} = m\vec{a}_{\text{цм}}.$$

В проекциях на оси:

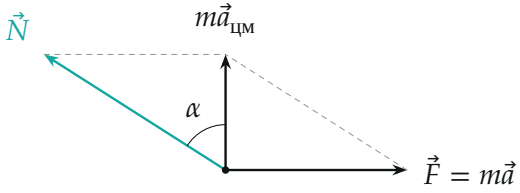
$$x:\ F + N_x = 0 \ \Rightarrow\ N_x = -ma; \qquad y:\ N_y = m\,\frac{2a}{\pi}.$$

Модуль и направление:

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = ma\sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} = ma\,\frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{\pi} \approx 1{,}19\,ma,$$

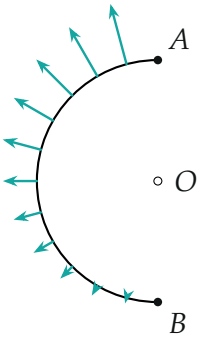
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|N_x|}{N_y} = \frac{\pi}{2},\ \alpha \approx 57{,}5^\circ.$$

Сила направлена влево (против $\vec{F}$) и вверх (от B к A), под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{2}$ к диаметру BA.



Сложение сил: $\vec{F} + \vec{N} = m\vec{a}_{цм}$; $ma_{цм} = \frac{2}{\pi}ma$ вдоль диаметра.

4. Второй способ: сумма реакций по кусочкам. Нормальная проекция второго закона Ньютона для кусочка: ускорение по радиусу ноль, а натяжения дают силу $T\,d\varphi$ к центру. Значит, трубка давит на кусочек наружу: $dN = T\,d\varphi$, и давление растёт к концу A вместе с T. Сумма $\int T(\varphi)\,\vec{e}_r\,d\varphi$ с $T = \dfrac{ma}{\pi}\cdot\dfrac{l}{R}$, посчитанная численно (python), даёт $N_x = -1{,}000\,ma$, $N_y = 0{,}637\,ma = \frac{2}{\pi}ma$ — то же самое.



Реакции трубки на кусочки равной длины: наружу по радиусу, растут линейно от B к A вместе с натяжением.

Обратите внимание: $\vec{N}$ не направлена к центру и не перпендикулярна $\vec{F}$. Трубка не только «держит» канат по радиусу, но и забирает у силы F горизонтальный импульс: центр масс каната ускоряется вдоль диаметра, а не вдоль $\vec{F}$.

Проверка. Размерность: $[ma] = \text{Н}$. Если бы канат был прямым и лежал вдоль $\vec{F}$, сумма $\vec{\tau}\,dl$ совпала бы с πR вдоль x, $a_{\text{цм}} = a$ и $N = 0$ — трубка не нужна. Второй способ (интеграл реакций) даёт те же проекции.

Ответ. $N = ma\dfrac{\sqrt{\pi^2+4}}{\pi} \approx 1{,}19\,ma$; сила направлена против $\vec{F}$ и вдоль диаметра от свободного конца к A так, что составляет с диаметром угол $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{2} \approx 57{,}5^\circ$ (проекции: $-ma$ вдоль $\vec{F}$, $\dfrac{2}{\pi}ma$ вдоль диаметра).