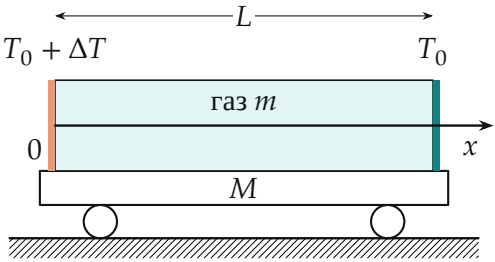
# Баллон на платформе

**Задача 3.** [МОШ 2022/23, заключительный этап, 10 класс, задача 3] Тележка установлена на горизонтальных прямолинейных рельсах и может двигаться по ним без сопротивления. На тележке закреплён сосуд цилиндрической формы, ось которого параллельна рельсам. Длина цилиндра и его радиус равны $L$ и $r$ соответственно. Масса тележки с пустым сосудом равна $M$. Сосуд заполняют идеальным газом массой $m$ при температуре $T_0$. Одно основание сосуда поддерживают при температуре $T_0$. Температура другого основания в начальный момент также равна $T_0$, но затем её медленно увеличивают до величины $T_0 + \Delta T$ (при этом известно, что $\Delta T \ll T_0$). Боковая поверхность сосуда теплоизолирована.

Введём ось $OX$, направив её вдоль оси цилиндра от основания с температурой $T_0 + \Delta T$ к основанию с температурой $T_0$. Пусть начало координат совпадает с основанием цилиндра с температурой $T_0 + \Delta T$. Задачу решайте приближённо, пренебрегая всеми слагаемыми, пропорциональными квадрату малого параметра $\delta T = \dfrac{\Delta T}{T}$ и его старшим степеням. Можно использовать приближённую формулу $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, справедливую при малых $x$ ($|x| \ll 1$).

a) Определите зависимость плотности газа в цилиндре от координаты $\rho(x)$.

b) Найдите смещение тележки $d$ относительно начального положения.



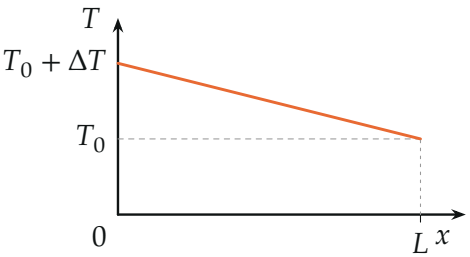

*Поясняющий рисунок: тележка с сосудом; левое основание нагревают до $T_0 + \Delta T$, правое держат при $T_0$.*

▲ **Решение. Что происходит.** Внешних горизонтальных сил на систему «тележка + сосуд + газ» нет (рельсы гладкие, газ действует на стенки изнутри), поэтому её центр масс по горизонтали не сдвигается. При нагреве левого торца газ у него становится реже, часть газа уходит к холодному правому торцу — центр масс газа сдвигается вправо. Чтобы общий центр масс остался на месте, тележка должна сдвинуться влево. Класс задачи — закон движения центра масс с внутренним перераспределением массы; распределение массы находим из уравнения состояния газа.

**Обозначения.** $S = \pi r^2$ — площадь основания, $\rho_0 = \dfrac{m}{SL}$ — начальная плотность, $\delta = \delta T = \dfrac{\Delta T}{T_0}$, $p$ — давление газа в конечном состоянии, $\mu$ — молярная масса, $X$ — координата центра масс газа.

**Пункт а). 1. Давление и температура.** Нагрев медленный: в каждый момент газ почти в равновесии по давлению (выравнивание давления идёт со скоростью звука, гораздо быстрее нагрева), поэтому $p$ одинаково во всём сосуде. Теплопроводность устанавливает стационарный поток тепла от горячего торца к холодному; боковая поверхность теплоизолирована, поток через любое сечение один и тот же, и при малом $\Delta T$ температура меняется вдоль оси линейно:

$$T(x) = T_0 + \Delta T\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$




*Стационарный профиль температуры: линейный от $T_0 + \Delta T$ до $T_0$.*

**2. Плотность.** Из уравнения Менделеева — Клапейрона для малого объёма газа: $\rho(x) = \dfrac{p\mu}{RT(x)}$, то есть $\rho \propto \dfrac{1}{T}$. Разложим, отбросив $\delta^2$:

$$\rho(x) = \frac{p\mu}{RT_0}\Big(1 + \delta(1 - \tfrac{x}{L})\Big)^{-1} \approx C\Big(1 - \delta + \delta\frac{x}{L}\Big), \qquad C = \frac{p\mu}{RT_0}.$$

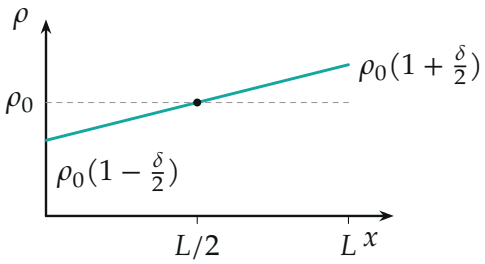
Неизвестную постоянную $C$ (то есть давление) найдём из сохранения массы газа:

$$m = S\int_0^L \rho\,dx = CSL\Big(1 - \delta + \frac{\delta}{2}\Big) = CSL\Big(1 - \frac{\delta}{2}\Big) \;\Rightarrow\; C \approx \rho_0\Big(1 + \frac{\delta}{2}\Big).$$

Перемножим и снова отбросим $\delta^2$:

$$\rho(x) = \frac{m}{\pi r^2 L}\left(1 + \frac{2x - L}{2L}\,\delta\right).$$

Посередине плотность прежняя, у горячего торца она меньше на $\rho_0\delta/2$, у холодного больше на столько же.




*Плотность газа: линейно растёт к холодному торцу; площадь под графиком (масса) та же, что у $\rho_0$.*

**Пункт b). 3. Центр масс газа.**

$$X = \frac{S}{m}\int_0^L x\,\rho\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L x\left(1 + \frac{2x - L}{2L}\delta\right)dx = \frac{L}{2} + \frac{\delta}{2L^2}\left(\frac{2L^3}{3} - \frac{L^3}{2}\right),$$

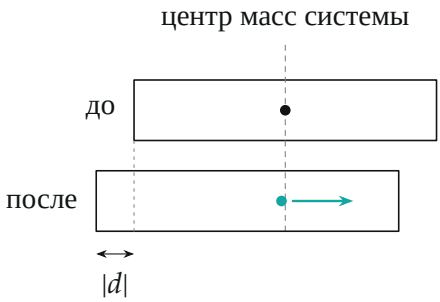
$$X = \frac{L}{2} + \frac{\delta L}{12}.$$

Относительно сосуда центр масс газа сместился на $+\dfrac{\delta L}{12}$ (к холодному торцу).

**4. Смещение тележки.** Пусть тележка сместилась на $d$ вдоль оси $x$. Тогда тележка с сосудом сдвинулась на $d$, а газ — на $d + \dfrac{\delta L}{12}$. Центр масс системы неподвижен (внешних горизонтальных сил нет, вначале всё покоилось):

$$Md + m\left(d + \frac{\delta L}{12}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -\frac{m}{M+m} \cdot \frac{L}{12}\,\delta.$$

Знак минус: тележка сдвигается в сторону горячего торца, на величину $\dfrac{m}{M+m}\dfrac{L\,\delta T}{12}$.




*Газ уходит к холодному торцу (вправо), сосуд с тележкой сдвигается влево так, что общий центр масс остаётся на месте (смещения преувеличены).*

Обратите внимание: давление тоже меняется, но на ответ это не влияет — нужна только форма $\rho(x)$, а её масштаб задаёт масса газа. Ошибка — считать $\rho$ у холодного торца равной $\rho_0$: тогда масса газа не сохранится.

**Проверка.** Размерность: $d$ — в метрах. Пределы: $M \gg m$ — тележка не сдвигается; $\delta \to 0 — d \to 0$. Масса газа по найденной $\rho(x)$: $S\rho_0 \int_0^L (1+\frac{2x-L}{2L}\delta)dx = m$ — сохраняется точно.

**Ответ.** а) $\rho(x) = \dfrac{m}{\pi r^2 L}\left(1 + \dfrac{2x-L}{2L}\,\delta T\right)$; b) $|d| = \dfrac{m}{M+m} \cdot \dfrac{L}{12}\,\delta T$, к нагреваемому основанию.