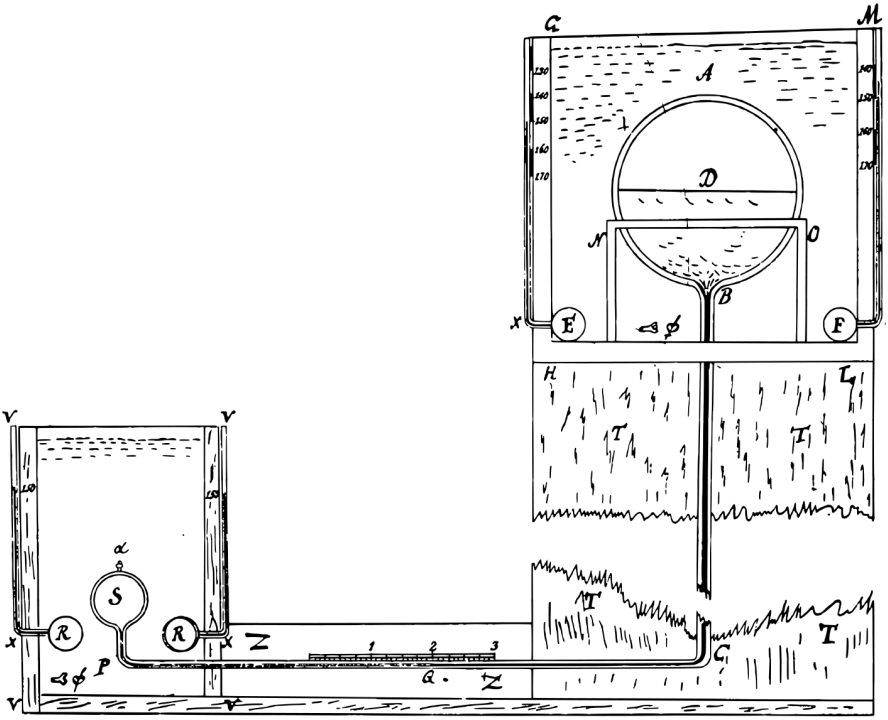
Барометр Ломоносова

Задача 4. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 10 класс, задача 4] Для измерения небольших изменений ускорения свободного падения δg (обусловленных, например, изменением высоты над уровнем моря или притяжением Луны) Михаил Васильевич Ломоносов предложил создать прибор (*универсальный барометр*), конструкцию которого описал так: «Возьмём стеклянный шар AB с толстыми стенками и внутренним диаметром в три дюйма; соединим с ним барометрическую трубку BC такой длины, чтобы от центра шара до изгиба C было 28 дюймов; после загиба пусть идёт горизонтальная трубочка CP длиною в фут или больше со стеклянным шаром S диаметром в дюйм; просвет в трубочке CP пусть будет диаметром в $\frac{1}{4}$ линии». Схема, сопровождавшая описание, приводится ниже.



Предполагалось, что в прибор заливается ртуть так, чтобы при вертикальном положении трубки BC бóльший шар был заполнен наполовину (при этом над ртутью не оставалось воздуха), а трубка PC была заполнена до точки Q (середина PC). После этого малый шар герметизировался, оба шара размещались в специальных ящиках, заполненных тающим льдом. Ожидалось, что изменение ускорения свободного падения можно будет обнаружить по изменению положения границы столба ртути в горизонтальной трубке, которое фиксировалось линейкой, расположенной рядом с трубкой. Прибор не был изготовлен, вероятно заявка Ломоносова была отклонена.

a) Пусть расстояние между соседними делениями шкалы линейки составляет 1 линию. Какое минимальное относительное изменение $\dfrac{\delta g}{g}$ ускорения свободного падения можно было бы обнаружить при помощи универсального барометра?
1 фут = 12 дюймов, 1 дюйм = 10 линий, 1 дюйм = 2,54 см. Плотность ртути и давление её насыщенных паров при 0 °C равны 13,6 г/см^3 и 0,25 кПа соответственно.

b) На какой минимальной высоте над уровнем моря можно было бы измерить изменение ускорения свободного падения при помощи описанного прибора с относительной погрешностью не больше, чем 20 %? Считайте, что погрешность определяется только погрешностью считывания линейки, радиус Земли равен 6400 км.

▲ **Решение. Что происходит.** Над ртутью в большом шаре — только её насыщенный пар, давление $p_н$. Газ в малом шаре S и в трубке QP сжат столбом ртути высоты h (от уровня в большом шаре до горизонтальной трубки): $p = p_н + \rho g h$. Изменилось g — изменилось давление столба, газ при постоянной температуре (тающий лёд) сжимается или расширяется, и граница ртути Q в тонкой трубке сдвигается. Трубка очень тонкая, а шар S большой: малое относительное изменение объёма газа даёт заметный сдвиг границы. Класс задачи — малые изменения: связываем относительные приращения $\delta g/g$, $\delta p/p$, $\delta V/V$.

Обозначения. $\rho = 13{,}6$ г/см^3, $h = 28$ дюймов $= 71{,}1$ см, $p_н = 0{,}25$

кПа; V — объём газа, s — площадь просвета трубки, δx — сдвиг границы Q; $D = 1$ дюйм — диаметр шара S, $d_0 = \frac{1}{4}$ линии — диаметр просвета.

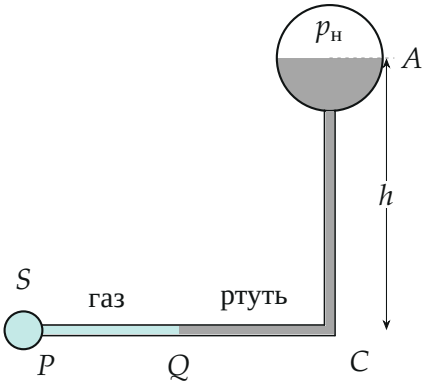


Схема прибора: ртуть (серая) от уровня в большом шаре до границы Q, газ (бирюзовый) — в трубке QP и шаре S; над ртутью в большом шаре — насыщенный пар.

Пункт а). 1. Давление газа. Ртуть покоится. Давление в горизонтальной трубке одинаково по длине (высота не меняется), на глубине h под уровнем в большом шаре оно равно

$$p = p_н + \rho g h = 0{,}25\text{ кПа} + 13600 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}711\text{ Па} = 0{,}25 + 94{,}8 = 95{,}0\text{ кПа}.$$

Шар широкий (3 дюйма), а трубка тонкая, поэтому при сдвиге границы Q уровень в шаре почти не меняется, h можно считать постоянным.

2. Связь малых изменений. При изменении g на δg давление меняется на $\delta p = \rho h\,\delta g$ (давление пара при той же температуре прежнее). Газ при 0 °C сжимается изотермически: по закону Бойля — Мариотта $pV = \text{const}$, для малых изменений

$$\frac{\delta V}{V} = -\frac{\delta p}{p} = -\frac{\rho g h}{p} \cdot \frac{\delta g}{g}.$$

Изменение объёма — это сдвиг границы в тонкой трубке: $|\delta V| = s\,\delta x$.

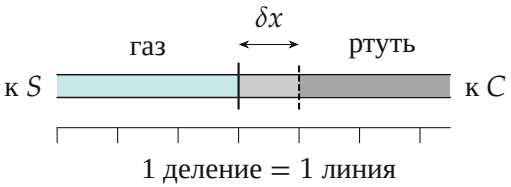
Значит,

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{p}{\rho g h} \cdot \frac{s\,\delta x}{V}.$$

3. Числа. V — объём шара S и половины трубки: $\dfrac{\pi D^3}{6} = 8{,}58$ см^3; трубка QP ($\frac{1}{2}$ фута, просвет $d_0 = 0{,}0635$ см, $s = \dfrac{\pi d_0^2}{4} = 3{,}17 \cdot 10^{-3}$ см^2) добавляет лишь 0,05 см^3, $V \approx 8{,}63$ см^3. Сдвиг, который ещё заметен, — одно деление, $\delta x = 1$ линия $= 0{,}254$ см:

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{95{,}0}{94{,}8} \cdot \frac{3{,}17 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}254}{8{,}63} \approx 0{,}93 \cdot 10^{-4} \approx 10^{-4}.$$

Если глаз различает половину деления — вдвое меньше, $\approx 5 \cdot 10^{-5}$.



Граница ртути в трубке CP рядом с линейкой: g уменьшилось — давление столба упало, газ расширился, граница сдвинулась к C на δx.

Пункт b). 4. Изменение g с высотой. По закону всемирного тяготения $g(H) = g_0 \dfrac{R^2}{(R+H)^2}$, при $H \ll R$

$$\frac{\delta g}{g} = 1 - \left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-2} \approx \frac{2H}{R}.$$

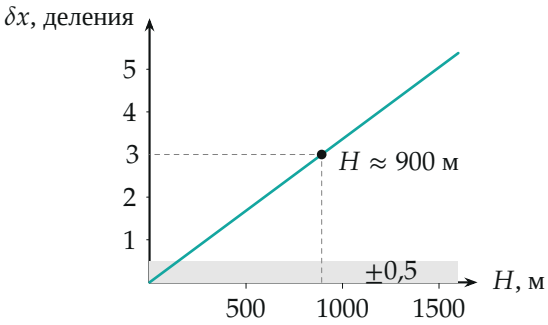
5. Погрешность. Погрешность считывания линейки — половина цены деления, $\Delta x = 0{,}5$ линии, ей отвечает погрешность $\Delta\left(\dfrac{\delta g}{g}\right) = 0{,}47 \cdot 10^{-4}$ (половина результата пункта а). Относительная погрешность сдвига $\dfrac{0{,}5 \text{ линии}}{\delta x} \leq 0{,}2$, если $\delta x \geq 2{,}5$ линии. Положение границы по линей-

ке читается целым числом делений, поэтому наименьший годный сдвиг — $\delta x = 3$ линии (так и у организаторов). Ему отвечает

$$\frac{\delta g}{g} = 3 \cdot 0{,}93 \cdot 10^{-4} = 2{,}8 \cdot 10^{-4} = \frac{2H}{R},$$

$$H = \frac{2{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{6}}{2} \text{ м} \approx 900 \text{ м}.$$

Если допустить отсчёт сдвига в 2,5 деления, вышло бы 750 м — та же оценка с точностью до округления деления.



Сдвиг границы ртути от высоты: $\delta x = \dfrac{2H/R}{0{,}93 \cdot 10^{-4}}$ делений. Серая полоса — погрешность отсчёта $\pm 0{,}5$ деления; не больше 20% она при сдвиге от 3 делений, то есть с $H \approx 900$ м.

Обратите внимание: насыщенный пар ртути над столбом — не «пустота», его давление входит в p. Здесь его вклад мал (0,25 из 95 кПа), но без него p и $\rho g h$ не различить. Сдвиг в пункте b) — целое число делений: 2,5 деления на линейке не отсчитать, поэтому берём 3.

Проверка. Размерность $\dfrac{s\,\delta x}{V}$ — безразмерная, как и $\delta g/g$. Предел: при толстой трубке ($s \to$ большое) чувствительность падает, при тонкой растёт — для этого Ломоносов и взял просвет в $\frac{1}{4}$ линии при шаре в дюйм. Оценка для Луны: её приливное изменение g около $10^{-7} g$ — в тысячу раз меньше чувствительности прибора.

Ответ. а) $\dfrac{\delta g}{g} = \dfrac{p_\text{н} + \rho g h}{\rho g h} \cdot \dfrac{s\,\delta x}{V} \approx 10^{-4}$ (при отсчёте в полделения —

$5 \cdot 10^{-5}$); b) $H \approx 900$ м (сдвиг не меньше 3 делений при погрешности отсчёта $\pm 0{,}5$ деления).