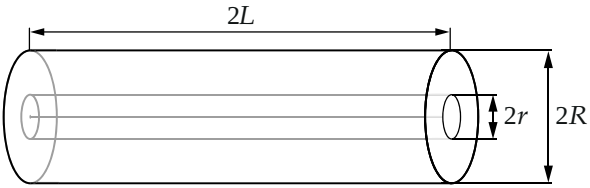
Кольцо и стержень

Задача 5. [МОШ 2022/23, 10 класс, задача 5] В однородном диэлектрическом цилиндре длиной $2L$ и диаметром $2R$ сделан цилиндрический канал малого радиуса r ($r \ll R$), соосный цилиндру (см. рисунок, представленный ниже).



В канал вставлен однородно заряженный стержень длиной $2L$ круглого сечения, диаметр стержня чуть меньше диаметра канала. Стержень может двигаться свободно вдоль оси канала. На цилиндре закреплено тонкое однородно заряженное кольцо, плоскость которого перпендикулярна оси цилиндра и делит цилиндр пополам. Кольцо и стержень на рисунке не изображены. Масса цилиндра с кольцом равна массе стержня и равна M. Стержень и кольцо несут одинаковые заряды разных знаков, равные по абсолютной величине q. Стержень смещают на небольшое расстояние x_0 ($x_0 \ll L$) от положения равновесия и отпускают.

a) Чему равна максимальная скорость стержня, если цилиндр закреплён?

b) Чему равна максимальная скорость стержня после освобождения системы, если цилиндр не удерживается внешней силой?

Гравитацией, всеми видами трения, а также эффектами, связанными с поляризацией диэлектрика, можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Кольцо притягивает стержень к положению, где их центры совпадают: там силы, действующие на две половины стержня, уравновешены. При малом смещении x равнодействующая получается пропорциональной x и направлена к равновесию — стержень ведёт себя как груз на пружине с некоторой жёсткостью $\varkappa$. Это

задача на малые колебания: найдём $\varkappa$ через поле кольца на оси, а максимальную скорость — из закона сохранения энергии. Во втором пункте добавляется закон сохранения импульса: цилиндр движется навстречу стержню.

Обозначения. Ось z — ось цилиндра, $z = 0$ — плоскость кольца; заряд кольца $-q$, стержня $+q$ (если наоборот, все силы те же); $\lambda = q/(2L)$ — заряд единицы длины стержня; $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$; x — смещение центра стержня относительно центра кольца; v — скорость стержня, u — скорость цилиндра.

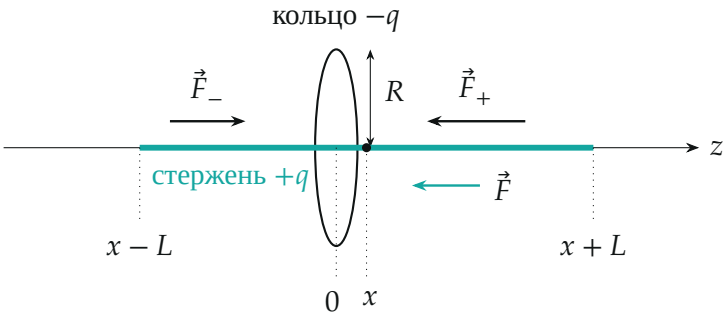


Рис. 2. Стержень сдвинут на x вправо. Кольцо тянет к себе правую часть стержня ($\vec{F}_+$) и левую ($\vec{F}_-$); правая часть длиннее, поэтому равнодействующая $\vec{F}$ направлена к положению равновесия

1. Поле кольца на оси. Каждый элемент кольца dq находится на расстоянии $\sqrt{z^2+R^2}$ от точки оси z. По принципу суперпозиции поперечные составляющие полей элементов взаимно гасятся, а вдоль оси складываются с множителем $z/\sqrt{z^2+R^2}$:

$$E_z(z) = -\frac{kqz}{(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

Знак минус: поле отрицательно заряженного кольца направлено к его центру. Канал узкий ($r \ll R$), поэтому весь стержень находится на оси, а диэлектрик по условию не поляризуется и поля не меняет.

2. Сила на стержень. На элемент стержня dz действует сила $\lambda E_z\,dz$; складываем по всей длине от $x-L$ до $x+L$. Первообразная $z/(z^2+R^2)^{3/2}$

равна $-1/\sqrt{z^2+R^2}$, поэтому

$$F(x)=\int\limits_{x-L}^{x+L}\lambda E_z\,dz=-k\lambda q\left[\frac{1}{\sqrt{(x-L)^2+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+L)^2+R^2}}\right].$$

При $x=0$ скобка равна нулю — это положение равновесия. При малом x раскладываем каждую дробь до первого порядка: производная $1/\sqrt{(x\mp L)^2+R^2}$ по x при $x=0$ равна $\pm L/(L^2+R^2)^{3/2}$, значит, скобка равна $2Lx/(L^2+R^2)^{3/2}$, и

$$F=-\varkappa x,\qquad \varkappa=\frac{2Lk\lambda q}{(L^2+R^2)^{3/2}}=\frac{kq^2}{(L^2+R^2)^{3/2}}.$$

Знак минус: сила направлена против смещения, к равновесию, как у пружины. По третьему закону Ньютона на кольцо (и цилиндр) действует сила $+\varkappa x$.

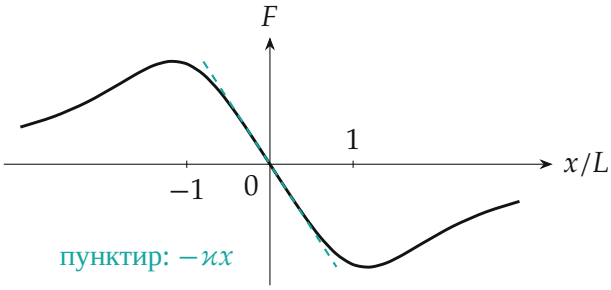


Рис. 3. Сила $F(x)$ по точной формуле п. 2 (расчёт для $R=L$). У нуля график совпадает с прямой $-\varkappa x$ (пунктир) — это и есть «пружина»

Пункт а. Цилиндр закреплён. Сила $-\varkappa x$ консервативна, ей соответствует потенциальная энергия $\varkappa x^2/2$. Закон сохранения энергии стержня между точкой остановки ($x=x_0$, $v=0$) и положением равновесия ($x=0$, скорость наибольшая):

$$\frac{\varkappa x_0^2}{2}=\frac{Mv_{\max}^2}{2}\quad\Rightarrow\quad v_{\max}=x_0\sqrt{\frac{\varkappa}{M}}=x_0\sqrt{\frac{kq^2}{M(L^2+R^2)^{3/2}}}.$$

Пункт b. Цилиндр свободен. Внешних сил вдоль оси нет, поэтому сохраняется импульс системы стержень + цилиндр с кольцом. Вначале всё покоится, значит, в проекции на ось z

$$Mv + Mu = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -v.$$

Тела движутся навстречу с одинаковыми по модулю скоростями, а сила зависит только от взаимного смещения x — оно и входит в потенциальную энергию $\varkappa x^2/2$. Начальное взаимное смещение x_0, в равновесии $x = 0$ и обе скорости наибольшие. Закон сохранения энергии системы:

$$\frac{\varkappa x_0^2}{2} = \frac{Mv_{\max}^2}{2} + \frac{Mu_{\max}^2}{2} = Mv_{\max}^2,$$

$$v_{\max} = x_0\sqrt{\frac{\varkappa}{2M}} = x_0\sqrt{\frac{kq^2}{2M(L^2+R^2)^{3/2}}}.$$

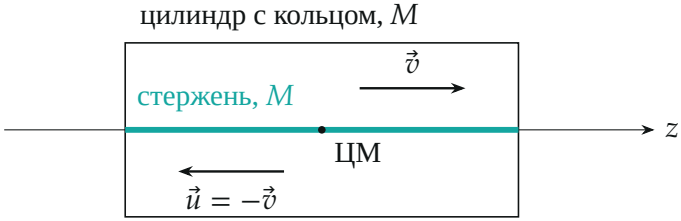


Рис. 4. Свободный цилиндр: центр масс системы стоит на месте, тела равной массы всегда движутся навстречу с равными скоростями, и каждое проходит половину взаимного смещения

Обратите внимание. В пункте b энергия $\varkappa x_0^2/2$ делится поровну между двумя телами, поэтому скорость стержня меньше в $\sqrt{2}$ раз, а не в 2 раза. Второй способ: относительно центра масс каждое тело — груз массы M на «половинке пружины» длиной $x/2$ с жёсткостью $2\varkappa$ и амплитудой $x_0/2$: $v_{\max} = \frac{x_0}{2}\sqrt{2\varkappa/M} = x_0\sqrt{\varkappa/(2M)}$ — то же.

Проверка. Размерность: kq^2/L^3 — это сила на длину, Н/м, как у жёсткости; $x_0\sqrt{(\text{Н/м})/\text{кг}}$ — м/с. Предел $R \gg L$: $\varkappa \to kq^2/R^3$ — стержень вблизи центра большого кольца, где поле на оси растёт линейно, $E \approx$

kqz/R^3. Предел $R \to 0$: $\varkappa \to kq^2/L^3$ — тогда сила определяется концами стержня, которые оказываются у кольца ближе всего.

Смысл: кольцо работает как пружина жёсткостью $kq^2/(L^2+R^2)^{3/2}$; освобождение цилиндра вдвое уменьшает долю энергии стержня.

У организаторов ответ записан без множителя $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ (в гауссовой системе); в СИ он нужен.

Ответ. a) $v_{\max} = x_0\sqrt{\dfrac{kq^2}{M(L^2+R^2)^{3/2}}}$; b) $v_{\max} = x_0\sqrt{\dfrac{kq^2}{2M(L^2+R^2)^{3/2}}}$,

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.