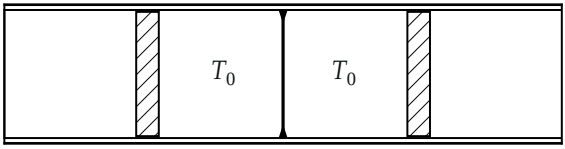
Разная работа

Задача 1. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 1] В горизонтально расположенной теплоизолированной трубе между двумя подвижными теплоизолирующими поршнями находятся в состоянии теплового равновесия при температуре 310 K две порции идеального одноатомного газа, разделённые жёсткой, неподвижной, хорошо проводящей тепло перегородкой (см. рисунок). Поршни могут двигаться вдоль оси трубы, не испытывая сопротивления. Снаружи поршней находится воздух при атмосферном давлении. Количество газа в каждой порции равно 1 моль. К правому поршню прикладывается сила (меняющаяся со временем), и поршень медленно перемещается, температура газа при этом квазистатически уменьшается на 30 K. Универсальная газовая постоянная R равна 8,3 Дж/(моль·K).



1. Найдите теплоёмкость порции газа, располагающейся справа от перегородки, в начале и в конце процесса охлаждения.
2. Какую работу $A_г$ совершает газ, располагающийся справа от перегородки, в процессе охлаждения? Какую работу A_F при этом совершает приложенная к поршню внешняя сила?

▲ **Решение. Что происходит.** Перегородка хорошо проводит тепло, а процесс медленный, поэтому обе порции в каждый момент имеют одну температуру T. Левый поршень свободен, так что слева давление всё время равно атмосферному p_0: левая порция остывает при постоянном давлении и отдаёт теплоту. Всё остальное теплоизолировано, значит, эту теплоту целиком получает правая порция. Главная идея: на каждый градус охлаждения правая порция получает столько теплоты, сколько отдаёт левая, — отсюда её теплоёмкость, а затем и весь процесс. Класс

задачи: теплоёмкость процесса $C = \delta Q/dT$ и первое начало термодинамики для газа, чей теплообмен задан условием.

Обозначения. Для 1 моля одноатомного газа $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R$. $T_0 = 310\,\text{K}$ — начальная температура, $T_1 = T_0 + \Delta T = 280\,\text{K}$ — конечная, $\Delta T = -30\,\text{K}$. $dT < 0$ — малое изменение температуры обеих порций. δQ_L, δQ_R — теплота, полученная левой и правой порцией за это изменение. V_0, V_1 — объём правой порции в начале и в конце, p — её давление, S — площадь поршня.

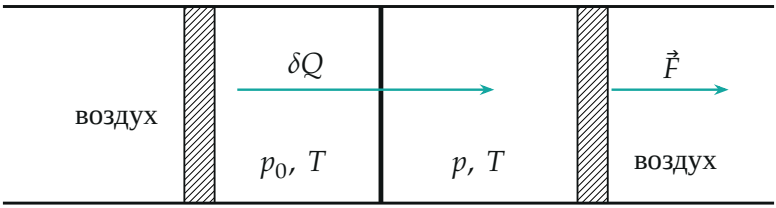


Рис. 2. Обе порции имеют температуру T. Слева давление равно p_0, теплота δQ идёт слева направо через перегородку; к правому поршню приложена сила $\vec{F}$.

Пункт 1.

1. Левая порция остывает изобарно. Левый поршень лёгкий и движется без сопротивления; при медленном движении сумма сил на него равна нулю, поэтому давление слева равно p_0 в течение всего процесса. Теплота, полученная молем газа при постоянном давлении, при изменении температуры на dT:

$$\delta Q_L = C_p\,dT.$$

Здесь $dT < 0$, значит $\delta Q_L < 0$: левая порция отдаёт теплоту.

2. Теплота переходит правой порции. Поршни и стенки трубы теплоизолирующие, перегородка теплоты не накапливает. Поэтому теплота уходит из левой порции только в правую:

$$\delta Q_R = -\delta Q_L = -C_p\,dT.$$

3. Теплоёмкость правой порции. По определению теплоёмкости процесса

$$C = \frac{\delta Q_R}{dT} = -C_p = -\frac{5}{2}R \approx -21 \text{ Дж/К}.$$

Величина не зависит от температуры, поэтому в начале и в конце процесса она одна и та же. Знак словами: газ получает теплоту, а его температура при этом падает.

Обратите внимание: для правой порции нельзя писать $\delta Q = C_V\,dT$ или $C_p\,dT$. Она меняет p, V и T сразу, и её теплоёмкость определяется тем, откуда приходит теплота, — здесь от левой порции.

Пункт 2.

4. Работа газа справа. Запишем первое начало термодинамики для правой порции на малом шаге: $\delta Q_R = dU_R + \delta A$, где $dU_R = C_V\,dT$ и $\delta A = p\,dV$ — работа газа. Отсюда

$$\delta A = \delta Q_R - C_V\,dT = -(C_p + C_V)\,dT = -4R\,dT.$$

Просуммируем по всему охлаждению, от T_0 до T_1:

$$A_\text{г} = -4R\,\Delta T = 4 \cdot 8{,}3 \cdot 30 \approx 1000 \text{ Дж}.$$

Знак словами: газ совершает положительную работу, то есть расширяется. Объём правой порции подсчитаем в пункте 5.

5. Объём правой порции в конце. Для одного моля $p = RT/V$. Первое начало для малого шага, $-C_p\,dT = C_V\,dT + \dfrac{RT}{V}\,dV$, после подстановки $C_p + C_V = 4R$ даёт

$$-4\,\frac{dT}{T} = \frac{dV}{V}.$$

Проинтегрируем от начала до конца процесса: $-4\ln\dfrac{T_1}{T_0} = \ln\dfrac{V_1}{V_0}$, то есть $T^4V = \text{const}$ и

$$V_1 = V_0\Big(\frac{T_0}{T_1}\Big)^4 = V_0\Big(\frac{310}{280}\Big)^4 \approx 1{,}50\,V_0.$$

Равенство $T^4V = \text{const}$ — политропа с показателем $n = \dfrac{C - C_p}{C - C_V} = \dfrac{5}{4}$: из $p = RT/V$ следует $pV^{5/4} = \text{const}$. Давление справа в конце $p_1 = p_0(T_1/T_0)^5 \approx 0{,}60\,p_0$, то есть оно ниже атмосферного.

6. Начальный объём. До начала опыта поршни свободны и давление в обеих порциях равно p_0, так что $p_0V_0 = RT_0$.

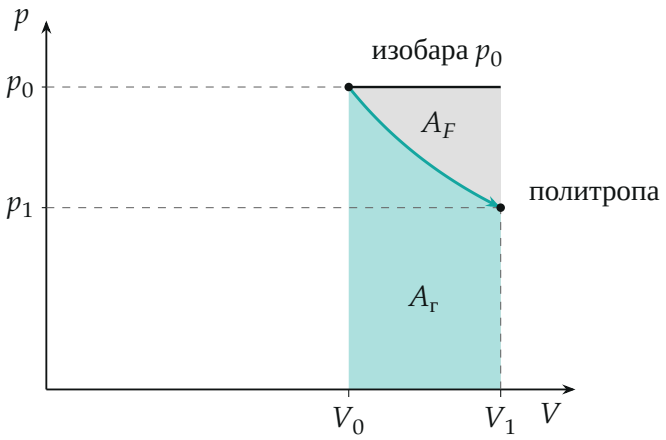


Рис. 3. Правая порция расширяется по политропе $pV^{5/4} = \text{const}$. Площадь под кривой — работа газа $A_г$, весь прямоугольник под изобарой — работа против атмосферы $p_0(V_1 - V_0)$, серый серп между ними — работа внешней силы A_F.

7. Работа внешней силы. Правый поршень лёгкий и движется медленно, ускорения нет, поэтому по теореме о кинетической энергии работа всех приложенных к нему сил равна нулю. На него действуют газ, атмосфера и сила $\vec{F}$ (рис. 4). Газ совершает работу $A_г$; атмосфера давит на поршень внутрь, поэтому при смещении, увеличивающем объём на $V_1 - V_0$, её работа равна $-p_0(V_1 - V_0)$. Тогда

$$A_г - p_0(V_1 - V_0) + A_F = 0, \qquad A_F = p_0(V_1 - V_0) - A_г.$$

Из $p_0V_0 = RT_0$ и формулы пункта 5 работа против атмосферы $p_0(V_1 - V_0) = RT_0\left[(T_0/T_1)^4 - 1\right]$. Подставим числа: $RT_0 \approx 2573$ Дж,

$(310/280)^4 - 1 \approx 0{,}50$, так что $p_0(V_1 - V_0) \approx 1290$ Дж и

$$A_F \approx 1290 - 996 \approx 300 \text{ Дж}.$$

Знак словами: работа положительна, сила направлена наружу, по ходу поршня. Давление справа ниже атмосферного, атмосфера прижимает поршень к газу, и его приходится вытягивать.

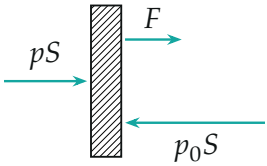


Рис. 4. Силы на правый поршень: $pS + F = p_0S$, давление газа $p < p_0$.

Обратите внимание: A_F не равна ни работе газа, ни работе против атмосферы по отдельности. Работу атмосферы в баланс нужно включить, иначе получится 1000 Дж вместо 300 Дж.

Проверка. Размерность: $R\,\Delta T$ — джоуль. Первый независимый способ для $A_\text{г}$: для политропы с $n = \frac{5}{4}$ работа $A = \dfrac{p_0V_0 - p_1V_1}{n-1} = 4R(T_0 - T_1)$ — совпадает с пунктом 4. Второй способ — не использует теплоёмкость: первое начало для обеих порций вместе, теплообмена с внешним миром нет, изменение внутренней энергии $2C_V\,\Delta T = -747$ Дж равно сумме работ над порциями. Над левой атмосфера совершает работу $-p_0\,\Delta V_L = -R\,\Delta T = +249$ Дж, над правой — $-A_\text{г}$, откуда $A_\text{г} = 249 + 747 = 996$ Дж. Для A_F: интеграл $\int (p_0 - p)\,dV$ по рис. 3 равен 297 Дж.

Физический смысл: энергия, отданная левой порцией, и работа внешней силы уходят на расширение правой порции против атмосферы и на её собственную работу; газ справа охлаждается, потому что отдаёт энергию работой больше, чем получает теплотой.

Ответ. 1) $C = -\dfrac{5R}{2} \approx -21$ Дж/К и в начале, и в конце процесса; 2) $A_\text{г} = -4R\,\Delta T \approx 1000$ Дж; $A_F = RT_0\Big[\Big(\dfrac{T_0}{T_0 + \Delta T}\Big)^4 - 1\Big] - A_\text{г} \approx 300$ Дж.