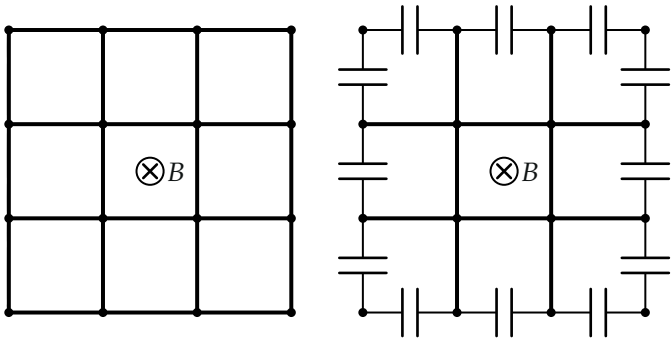
Токи и заряды

Задача 2. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Внутри соленоида, ось которого вертикальна, располагается плоская проволочная сетка размером 3×3 ячейки. Ось соленоида перпендикулярна плоскости сетки и проходит через её центр (см. рисунок слева). Сопротивление перемычки, соединяющей два соседних узла, равно r. В соленоиде создаётся магнитное поле, направленное так, как показано на рисунке. Сила тока в витках соленоида равномерно увеличивается со временем, так что абсолютная величина скорости изменения магнитного потока через ячейку сетки оказывается равна $\left|\dfrac{d\Phi}{dt}\right| = 4\mathcal{E}_0$.



1. Определите значения токов, текущих в перемычках, соединяющих узлы сетки. Сделайте рисунок, укажите направления этих токов.
2. Все перемычки на границе сетки заменили на конденсаторы одинаковой ёмкости (см. рисунок справа). Найдите напряжения на конденсаторах.

▲ **Решение. Что происходит.** Поле соленоида одно и то же во всей сетке, поток через каждую ячейку одинаков и растёт одинаково, поэтому в каждой ячейке действует ЭДС индукции $4\mathcal{E}_0$. Магнитное поле направлено от нас и растёт, значит, по правилу Ленца индукционный ток создаёт

поле к нам и идёт против часовой стрелки. ЭДС нельзя приписать отдельной перемычке, зато для любого контура она равна сумме ЭДС ячеек внутри него: $\sum Ir = 4\mathcal{E}_0 N$, где N — число ячеек в контуре. Главная идея: поворот на 90° делит ячейки на три сорта, а токи удобно описать контурными токами. Класс задачи: индукция → ЭДС → цепь.

Обозначения. Контурный ток — ток, который обходит ячейку против часовой стрелки по всем четырём её сторонам: I_0 в центральной ячейке, I_1 в угловых, I_2 в боковых (рис. 2). Любое распределение токов — сумма таких колец, первое правило Кирхгофа в узлах тогда выполнено само. Ток в перемычке, общей для двух ячеек, равен разности их контурных токов (рис. 2), в наружной перемычке — контурному току её ячейки. Токи измеряем в единицах $\mathcal{E}_0/r$.

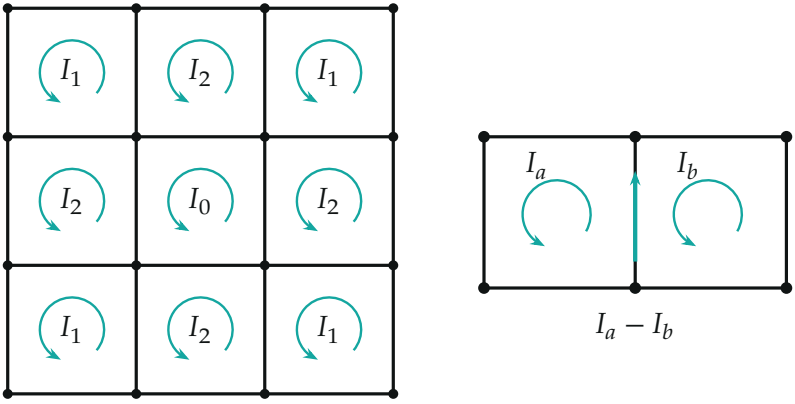


Рис. 2. Слева: контурные токи трёх сортов ячеек. Справа: перемычка между двумя ячейками — кольцо I_a идёт по ней вверх, кольцо I_b — вниз, ток в перемычке равен $I_a - I_b$.

Пункт 1.

1. Симметрия. Поворот на 90° вокруг оси соленоида переводит сетку и поле в себя, поэтому в перемычках, переходящих друг в друга, токи одинаковы. Неизвестных остаётся три: I_0, I_1, I_2.

2. Второе правило Кирхгофа для ячеек трёх сортов. Обходим каждую ячейку против часовой стрелки, вдоль её контурного тока. Все четыре перемычки центральной ячейки общие с боковыми, ток в каждой равен $I_0 - I_2$. У боковой ячейки одна общая сторона с центром, две — с

угловыми и одна наружная. У угловой — две общие с боковыми и две наружные:

$$\begin{aligned} &\text{центр:} && 4r(I_0 - I_2) = 4\mathcal{E}_0, \\ &\text{боковая:} && r\big[(I_2 - I_0) + 2(I_2 - I_1) + I_2\big] = 4\mathcal{E}_0, \\ &\text{угловая:} && r\big[2(I_1 - I_2) + 2I_1\big] = 4\mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

Единицы $\mathcal{E}_0/r$: $I_0 = I_2 + 1$ и $I_1 = 1 + \frac{1}{2}I_2$. Подставим во второе уравнение: $4I_2 - (I_2 + 1) - 2 - I_2 = 4$, откуда $2I_2 = 7$ и

$$I_2 = \frac{7}{2}\frac{\mathcal{E}_0}{r}, \qquad I_1 = \frac{11}{4}\frac{\mathcal{E}_0}{r}, \qquad I_0 = \frac{9}{2}\frac{\mathcal{E}_0}{r}.$$

3. Токи в перемычках. Переходим от контурных токов к токам в перемычках (рис. 3):

$$i_1 = I_0 - I_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{r}, \quad i_2 = I_2 - I_1 = \frac{3\mathcal{E}_0}{4r},$$
$$i_3 = I_2 = \frac{7\mathcal{E}_0}{2r}, \qquad i_4 = I_1 = \frac{11\mathcal{E}_0}{4r}.$$

i_1 — в перемычках между центральной и боковыми ячейками, i_2 — между боковой и угловой, i_3 — в наружных перемычках боковых ячеек, i_4 — в наружных перемычках угловых. Направления: в наружных перемычках ток идёт против часовой стрелки; в общей перемычке — по обходу ячейки с большим контурным током. Так как $I_0 > I_2 > I_1$, ток между центром и боковой ячейкой идёт по обходу центральной ячейки, а между боковой и угловой — по обходу боковой.

Обратите внимание: закон Ома к каждой ячейке по отдельности применять нельзя: перемычка общая с соседней ячейкой, и ток в ней — разность контурных токов.

Проверка. Первое правило Кирхгофа в узле на границе, где сходятся i_4, i_3 и i_2: $i_4 + i_2 = \frac{11}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{2} = i_3$, хотя при решении оно не использовалось. Второй способ — обход по внешнему периметру: $r \cdot 4(2i_4 + i_3) = 36\mathcal{E}_0$ — ЭДС всех девяти ячеек $9 \cdot 4\mathcal{E}_0$.

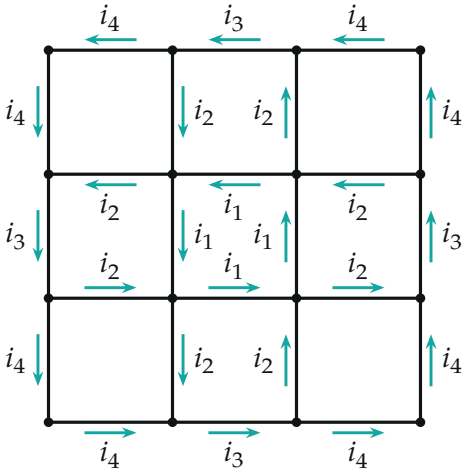


Рис. 3. Токи в перемычках: $i_1 = \mathcal{E}_0/r$, $i_2 = 3\mathcal{E}_0/(4r)$, $i_3 = 7\mathcal{E}_0/(2r)$, $i_4 = 11\mathcal{E}_0/(4r)$.

Пункт 2.

4. Ток течёт только по центральной ячейке. Пока ток в соленоиде растёт равномерно, ЭДС постоянны и после зарядки конденсаторов токи в ветвях с конденсаторами прекращаются. Замкнутый путь тока без конденсаторов есть только по сторонам центральной ячейки, остальные перемычки к нему лишь подходят и ведут к конденсаторам. Второе правило Кирхгофа для центральной ячейки по-прежнему даёт $4ri_1 = 4\mathcal{E}_0$, то есть $i_1 = \mathcal{E}_0/r$ (рис. 4).

5. Угловая ячейка. Обходим её против часовой стрелки. Контур содержит два конденсатора с одинаковыми напряжениями U_1 (симметрия) и две перемычки без тока, падение напряжения на которых равно нулю. Сумма напряжений на конденсаторах уравновешивает ЭДС ячейки:

$$2U_1 = 4\mathcal{E}_0 \quad \Rightarrow \quad U_1 = 2\mathcal{E}_0.$$

6. Боковая ячейка. Контур содержит один конденсатор U_2, три перемычки без тока и четвёртую — общую с центральной ячейкой, в которой идёт ток i_1. Центральная ячейка обходится против часовой стрелки, поэтому в общей перемычке этот ток направлен против обхода боковой

ячейки, и падение напряжения на ней равно $-i_1 r = -\mathcal{E}_0$:

$$U_2 - i_1 r = 4\mathcal{E}_0 \quad \Rightarrow \quad U_2 = 5\mathcal{E}_0.$$

ЭДС гонит положительные заряды против часовой стрелки, поэтому знак «+» стоит на пластине, которую встречаем первой при таком обходе (рис. 4).

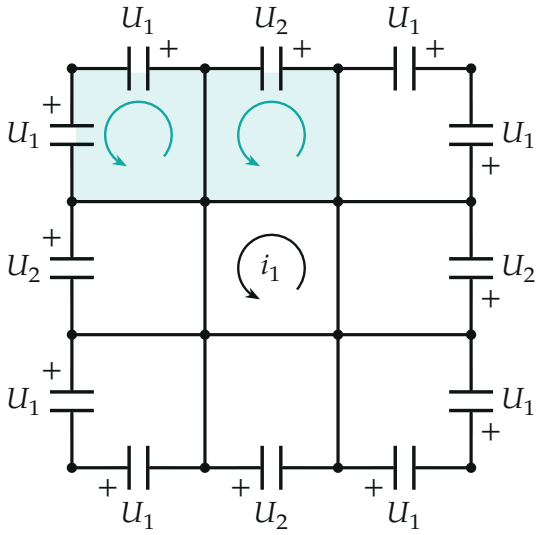


Рис. 4. Закрашены угловая и боковая ячейки; в центре течёт $i_1 = \mathcal{E}_0/r$.

Проверка. Второй способ: обход по внешнему периметру, где токов нет: сумма всех двенадцати напряжений равна ЭДС всех девяти ячеек, $8U_1 + 4U_2 = 16\mathcal{E}_0 + 20\mathcal{E}_0 = 36\mathcal{E}_0 = 9 \cdot 4\mathcal{E}_0$ — верно. Размерность: $\mathcal{E}_0$ — вольт, ir — вольт.

Смысл: ЭДС ячейки падает на конденсаторах контура, а в боковой ячейке добавляется ещё $\mathcal{E}_0$ — ток центрального кольца идёт в общей перемычке навстречу обходу.

Ответ. 1) $i_1 = \mathcal{E}_0/r$, $i_2 = 3\mathcal{E}_0/(4r)$, $i_3 = 7\mathcal{E}_0/(2r)$, $i_4 = 11\mathcal{E}_0/(4r)$; направления на рис. 3; 2) $U_1 = 2\mathcal{E}_0$ на конденсаторах угловых ячеек, $U_2 = 5\mathcal{E}_0$ на остальных.