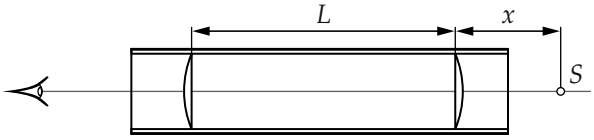
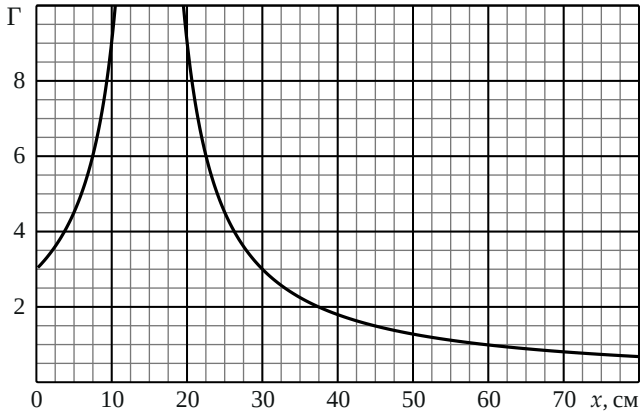
Увеличение системы

Задача 3. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Внутри трубы с непрозрачными стенками располагаются две одинаковые тонкие плосковыпуклые линзы. Плоскости линз перпендикулярны оси трубы (см. рисунок).



Наблюдатель рассматривает через систему линз небольшой предмет S, располагающийся на расстоянии x от передней линзы. График зависимости поперечного увеличения Г от расстояния x показан на рисунке. Предполагая, что изображение формируется параксиальными (приосевыми) лучами, определите расстояние L между линзами, а также их фокусное расстояние f.



▲ **Решение. Что происходит.** Свет проходит две одинаковые линзы подряд: изображение, построенное передней линзой (ближней к предмету),

служит предметом для задней, и увеличение системы равно произведению $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2$. Неизвестных два, f и L, и найти их можно, только получив $\Gamma(x)$ в общем виде и сравнив с графиком. Главная идея: после подстановки изображения первой линзы в формулу второй знаменатель оказывается линейным по x, поэтому у $\Gamma(x)$ одна особая точка, и все характерные числа читаются с графика. Класс задачи: изображение в первом элементе служит предметом для следующего.

Обозначения. Расстояние от предмета до линзы d считаем положительным, если предмет стоит перед линзой по ходу света; расстояние до изображения y — положительным, если изображение за линзой. Тогда формула тонкой линзы $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{f}$ верна при любых знаках, $y=\dfrac{df}{d-f}$, и увеличение

$$\Gamma = -\frac{y}{d} = \frac{f}{f-d}.$$

Знак $\Gamma < 0$ означает перевёрнутое изображение; на графике построен модуль $|\Gamma|$.

1. Первая линза. Предмет S на расстоянии $d_1 = x$ от неё:

$$y_1 = \frac{xf}{x-f}, \qquad \Gamma_1 = \frac{f}{f-x}.$$

При $x < f$ величина $y_1 < 0$: изображение мнимое, лежит с той же стороны от линзы, что и предмет.

2. Вторая линза. Изображение первой линзы лежит на расстоянии y_1 за первой линзой, вторая стоит на расстоянии L за первой, поэтому предмет для второй находится на расстоянии $d_2 = L - y_1$ перед ней. Обратите внимание: d_2 может оказаться отрицательным — изображение первой линзы лежит уже за второй линзой (мнимый предмет); формулы остаются верными, менять ничего не нужно.

$$\Gamma_2 = \frac{f}{f-d_2} = \frac{f}{f-L+y_1}.$$

3. Увеличение системы. Перемножим $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2 = \dfrac{f^2}{(f-x)(f-d_2)}$ и раскроем знаменатель, учитывая $(f-x)\,y_1 = -xf$:

$$(f-x)(f-d_2) = (f-x)(f-L) + (f-x)\,y_1 = f(f-L) - x(2f-L).$$

Получаем общую формулу

$$\Gamma(x) = \frac{f^2}{f(f-L)-x(2f-L)} = \frac{f^2}{2f-L}\cdot\frac{1}{x-x_0}, \qquad x_0 = \frac{f(f-L)}{2f-L}.$$

Знаменатель линеен по x: у графика одна особая точка $x = x_0$ (там изображение уходит в бесконечность), по обе стороны от неё $|\Gamma| \propto 1/|x-x_0|$, а знак Γ при переходе через неё меняется: изображение из прямого становится перевёрнутым. Проверка предела: при $L = 0$ линзы вплотную, $\Gamma = \dfrac{f}{f-2x}$ — это одна линза с фокусным расстоянием $f/2$, как и должно быть.

4. Что видно на графике. Во-первых, $\Gamma(0) = 3$; из формулы $\Gamma(0) = \dfrac{f}{|f-L|}$, откуда $|f-L| = \dfrac{f}{3}$ и

$$L = \frac{2f}{3} \quad \text{или} \quad L = \frac{4f}{3}.$$

Во-вторых, ветви графика симметричны относительно $x = x_0$, поскольку $|\Gamma| \propto 1/|x-x_0|$. На графике $\Gamma(0) = \Gamma(30\text{ см}) = 3$, значит, $x_0 = 15$ см; ветви на краю графика ($\Gamma = 10$) стоят при $x \approx 10{,}5$ и 19,5 см, симметрично относительно 15 см.

5. Выбор между двумя значениями L**.** Для $L = \dfrac{4f}{3}$ получаем $x_0 = \dfrac{f\cdot(-f/3)}{2f/3} = -\dfrac{f}{2} < 0$: на положительной полуоси особой точки нет, $\Gamma = \dfrac{3f}{f+2x}$ монотонно убывает от 3, а на графике Γ растёт до бесконечности.

Значит, $L = \dfrac{4f}{3}$ не подходит. Для $L = \dfrac{2f}{3}$

$$x_0 = \frac{f \cdot f/3}{4f/3} = \frac{f}{4}, \qquad \Gamma(x) = \frac{3f}{|f - 4x|}.$$

Из $x_0 = 15$ см получаем $f = 4x_0 = 60$ см и $L = \dfrac{2f}{3} = 40$ см.

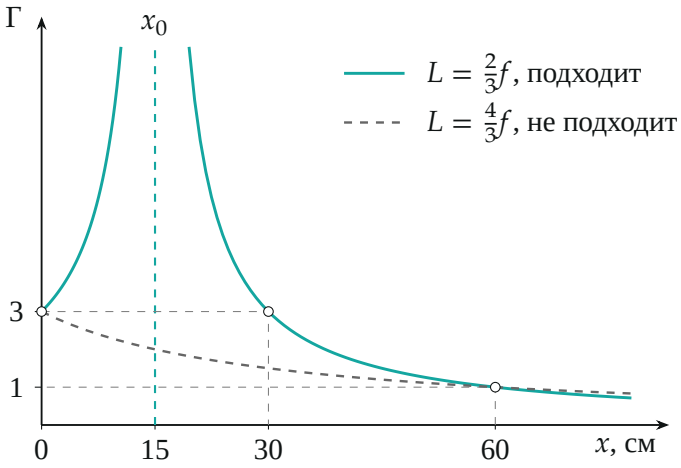


Рис. 2. $|\Gamma(x)|$ при $f = 60$ см: сплошная — $L = 40$ см (подходит), пунктир — $L = 80$ см (не подходит). Точки — отсчёты с графика условия.

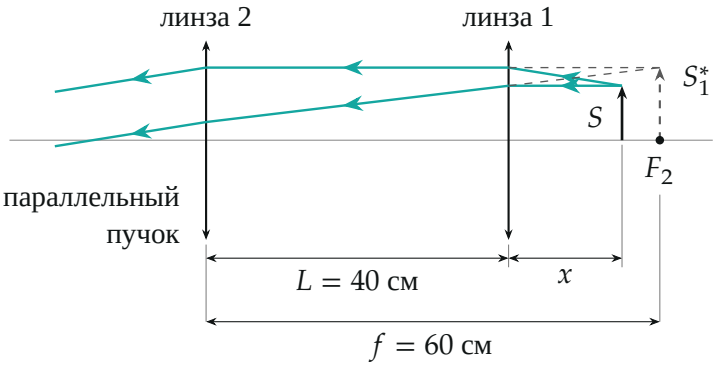


Рис. 3. Ход лучей при $x = 15$ см. Передняя линза даёт мнимое изображение S_1^* в фокальной плоскости второй линзы; из второй линзы свет выходит параллельным пучком.

Проверка. Подставим $f = 60$ см, $L = 40$ см в $|\Gamma| = \dfrac{45}{|15 - x|}$ и сравним с графиком условия: $x = 0$ — 3; $x = 30$ — 3; $x = 40$ — 1,8; $x = 60$ — 1; $x = 70$ — 0,82; $x = 10{,}5$ и $19{,}5$ — 10. Всё совпадает с графиком, причём точки $x = 40$, 60, 70 в определении f и L не использовались. Второй способ — ход лучей при $x = x_0 = 15$ см (рис. 3): передняя линза строит мнимое изображение S_1^* на расстоянии $y_1 = \dfrac{15 \cdot 60}{15 - 60} = -20$ см, и от него до второй линзы $d_2 = 40 + 20 = 60$ см $= f$. Предмет второй линзы стоит в её фокусе, и свет выходит параллельным пучком, то есть изображение уходит в бесконечность — $\Gamma \to \infty$, как и в формуле.

Физический смысл: особая точка графика — положение предмета, при котором система выпускает параллельный пучок; её положение и значение $\Gamma(0)$ — те два числа, по которым однозначно находятся f и L.

Ответ. $f = 60$ см, $L = \dfrac{2f}{3} = 40$ см.