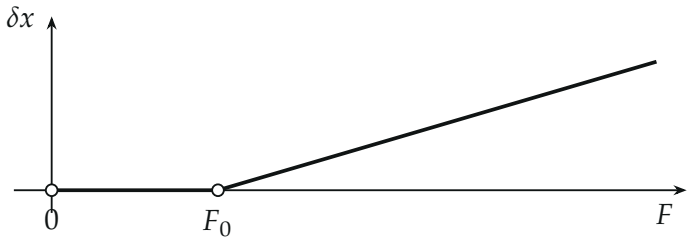
Поджатая пружина

Задача 4. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 4] Зависимость относительного удлинения δx поджатой пружины от силы F, растягивающей её в невесомости, изображена на графике, представленном ниже ($\delta x = \dfrac{x}{L_0}$, L_0 — начальная длина пружины, x — удлинение). Пружина не растягивается, пока выполняется неравенство $F \le F_0$, если же сила F становится больше F_0, то относительное удлинение δx начинает зависеть от силы F по линейному закону $\delta x = \dfrac{F - F_0}{\varepsilon}$, где $\varepsilon = \text{const}$.



Далее в задаче рассматриваются однородные пружины, для любого участка которых постоянные F_0 и ε такие же, как для исходной пружины длиной L_0. В каждом из пунктов масса пружины обозначается M. Коэффициентом упругости k поджатой пружины считается коэффициент пропорциональности между изменением силы и удлинением $k = \dfrac{F(x) - F_0}{x}$ при $F > F_0$. Во всех пунктах задачи рассматривается статическое равновесие пружин.

Безразмерные параметры $\gamma = \dfrac{kL_0}{Mg}$ и $f_0 = \dfrac{F_0}{Mg}$ (разные в разных пунктах задачи) характеризуют относительные жёсткость и силу поджатия пружины, g — ускорение свободного падения.

1. От поджатой пружины длиной L_0 отрезали участок длиной ΔL (в недеформированном состоянии), который стали растягивать силой F ($F > F_0$) в невесомости. Найдите длину y этого участка под нагрузкой как функцию силы F и параметров ΔL, k, L_0.

2. Поджатая пружина, параметры которой удовлетворяют соотношениям $f_0 > 1$, $\gamma = 1$, подвешена в поле тяжести к потолку за один из концов. К другому концу присоединяют груз массой $m = \mu M$ ($\mu > f_0$). Чему будет равна длина пружины в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0, f_0, μ.
3. Пусть относительная сила поджатия удовлетворяет неравенству $f_0 < 1$. Пружина подвешена к потолку в поле тяжести за один из концов. Чему равна её длина в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0, f_0, γ.
4. Поджатая пружина подвешена за один конец к потолку. К другому концу присоединяют грузы различной массы, снимая зависимость относительного удлинения $\delta L = \dfrac{L - L_0}{L_0}$ от относительной массы $\mu = \dfrac{m}{M}$ грузов (M — масса пружины). Результаты измерений представлены в таблице ниже.

μ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
δL, %	1,0	4,0	9,0	16,0	25,0	35,0	45,0

Определите относительную жёсткость γ и относительную силу поджатия f_0 этой пружины.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока сила меньше F_0, поджатая пружина не растягивается, выше — ведёт себя как обычная. В поле тяжести сила в разных сечениях разная: сечение удерживает всё, что ниже него, — груз и нижнюю часть пружины, — поэтому сверху пружина натянута сильнее, чем снизу, и каждый её участок растянут по-своему. Главная идея: разбить пружину на малые участки dx, найти длину каждого по пункту 1 при его силе и проинтегрировать. Где сила меньше F_0, участок не растягивается; границу находим из $F(x) = F_0$.

Обозначения. x — координата вдоль *недеформированной* пружины от точки подвеса вниз; на участок dx приходится масса $M\,dx/L_0$, так как пружина однородна. dy — длина этого участка под нагрузкой, $F(x)$ — сила в сечении x.

Пункт 1.

1. Связь ε и k. Для всей пружины при $F > F_0$ удлинение $x = L_0\,\delta x =$

$L_0\dfrac{F-F_0}{\varepsilon}$, поэтому

$$k=\frac{F-F_0}{x}=\frac{\varepsilon}{L_0},\qquad \varepsilon=kL_0.$$

2. Длина участка. В невесомости вдоль пружины нет внешних сил, поэтому на отрезанный участок действует та же сила F. Постоянные F_0 и ε у него те же, что у всей пружины, относительное удлинение $\dfrac{F-F_0}{\varepsilon}$, длина под нагрузкой

$$y=\Delta L\Big(1+\frac{F-F_0}{kL_0}\Big).$$

При $\Delta L=L_0$ получаем $y=L_0+\dfrac{F-F_0}{k}$, как в определении k.

Пункт 2.

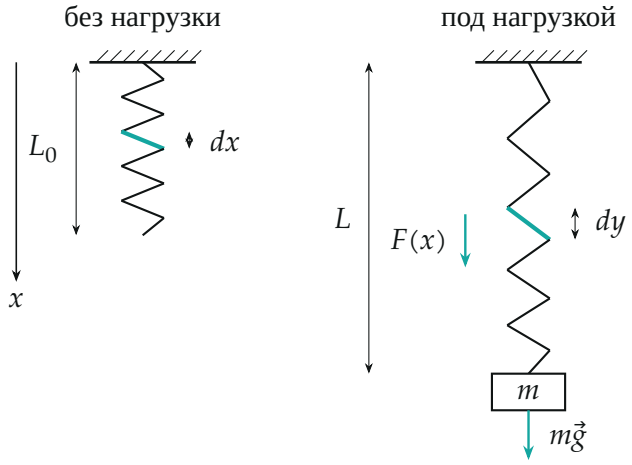


Рис. 2. Участок dx недеформированной пружины становится длиной dy под действием $F(x)$; витки внизу растянуты меньше, чем вверху (для рисунка $\mu=0{,}8, f_0=0{,}5, \gamma=1$).

3. Сила в сечении. Сечение x удерживает груз и нижнюю часть пружины, масса которой $M(1-x/L_0)$. Пружина и груз неподвижны, поэто-

му

$$F(x) = Mg\Big(\mu + 1 - \frac{x}{L_0}\Big).$$

Самое слабо нагруженное сечение — нижнее, $F(L_0) = \mu Mg > F_0$ (так как $\mu > f_0$), поэтому растянуты все участки.

4. Длина участка и пружины. По пункту 1 с $\Delta L = dx$ и $kL_0 = \gamma Mg = Mg$:

$$dy = dx\Big[1 + \frac{F(x) - F_0}{kL_0}\Big] = dx\Big[2 + \mu - f_0 - \frac{x}{L_0}\Big].$$

Сложим длины всех участков, от верха до низа:

$$L_1 = \int_0^{L_0} \Big[2 + \mu - f_0 - \frac{x}{L_0}\Big]dx = \Big(2 + \mu - f_0\Big)L_0 - \frac{L_0}{2} = \Big(\frac{3}{2} + \mu - f_0\Big)L_0.$$

Подынтегральная функция линейна, поэтому интеграл — её значение при $x = L_0/2$, умноженное на L_0 (площадь трапеции): тот же результат. Проверка: при $f_0 \to 0$ и любом γ та же выкладка даёт $L = L_0 + \dfrac{(m + M/2)g}{k}$ — привычное удлинение пружины под грузом с половиной собственного веса.

Пункт 3.

5. Где пружина растянута. Груза нет, $\mu = 0$, и $F(x) = Mg(1 - x/L_0)$. Сила убывает сверху вниз и достигает F_0 на глубине x^*:

$$Mg\Big(1 - \frac{x^*}{L_0}\Big) = F_0 \quad \Rightarrow \quad x^* = L_0(1 - f_0)$$

(рис. 3; здесь используется $f_0 < 1$, иначе даже наверху $F \le F_0$). Верхняя часть $0 < x < x^*$ растянута, нижняя — нет и сохраняет длину $L_0 - x^* = f_0 L_0$.

6. Длина растянутой части. Для $x < x^*$ по пункту 1: $dy = dx\Big[1 + \dfrac{F(x) - F_0}{\gamma Mg}\Big]$, где $\dfrac{F(x) - F_0}{Mg} = 1 - \dfrac{x}{L_0} - f_0 = \dfrac{x^* - x}{L_0}$. Интегрируем только

по растянутой части:

$$L_2' = \int_0^{x^*} \Big[1 + \frac{x^* - x}{\gamma L_0}\Big] dx = x^* + \frac{x^{*2}}{2\gamma L_0} = L_0(1 - f_0) + \frac{L_0(1-f_0)^2}{2\gamma}.$$

7. Вся пружина. Прибавим нерастянутую часть $f_0 L_0$:

$$L_2 = f_0 L_0 + L_2' = L_0\Big[1 + \frac{(1-f_0)^2}{2\gamma}\Big].$$

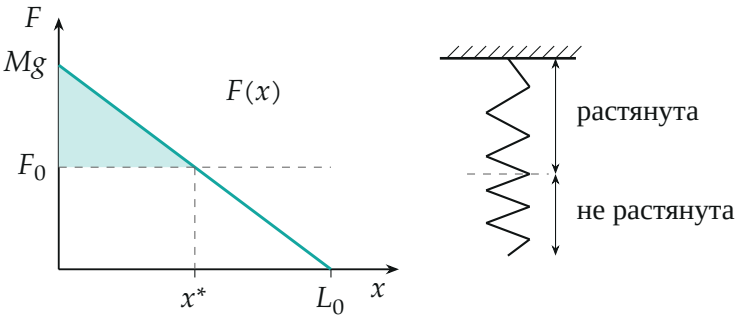


Рис. 3. Слева — сила вдоль пружины, закрашена часть с $F > F_0$. Справа — пружина: верх растянут, низ с прижатыми витками (для рисунка $f_0 = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}6$).

Обратите внимание: интеграл берётся только до x^*; формула пункта 2 здесь неприменима, нижняя часть ($F < F_0$) сохраняет длину $f_0 L_0$.

Проверка. При $f_0 = 0$: $L_2 = L_0 + \dfrac{Mg}{2k}$ — обычная пружина под собственным весом; при $f_0 \to 1$: $L_2 \to L_0$.

Пункт 4.

8. Все μ сразу. Сила в сечении по-прежнему $F(x) = Mg(\mu + 1 - x/L_0)$. Для $\mu \geq f_0$ растянуты все участки, и пункт 2 при любом γ даёт $\delta L = \dfrac{\mu + \frac{1}{2} - f_0}{\gamma}$ — прямая с наклоном $1/\gamma$ (не γ). При $\mu < f_0$ внизу $F < F_0$; граница $x^* = L_0(1 + \mu - f_0)$, и по пункту 3 $\delta L = \dfrac{(1 + \mu - f_0)^2}{2\gamma}$

— парабола. При $\mu = f_0$ обе формулы дают $\dfrac{1}{2\gamma}$ и один наклон: переходят друг в друга гладко.

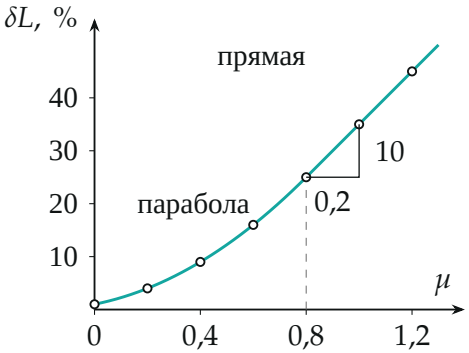


Рис. 4. $\delta L(\mu)$ при $\gamma = 2, f_0 = 0{,}8$; кружки — таблица, штрих — $\mu = f_0$.

9. Жёсткость. В таблице разности δL при шаге $\Delta\mu = 0{,}2$ равны 9% (от 0,6 до 0,8) и по 10% дальше: линейный участок начинается с $\mu = 0{,}8$. Наклон прямой $\dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{0{,}35 - 0{,}25}{0{,}2} = 0{,}5$, откуда $\gamma = 2$.

10. Сила поджатия. Для $\mu = 0$ формула параболы совпадает с результатом пункта 3: $\delta L(0) = \dfrac{(1-f_0)^2}{2\gamma} = 0{,}010$. Подставим $\gamma = 2$: $(1-f_0)^2 = 0{,}04$, $1 - f_0 = 0{,}2$, $f_0 = 0{,}8$; корень $f_0 = 1{,}2$ не подходит: при $f_0 \geq 1$ пружина без груза не растянута вовсе (даже наверху $F \leq F_0$), и было бы $\delta L(0) = 0$, а в таблице 1 %.

Проверка. При $\gamma = 2, f_0 = 0{,}8$ парабола $\delta L = \dfrac{(0{,}2 + \mu)^2}{4}$ даёт 1; 4; 9; 16 % при $\mu = 0$; 0,2; 0,4; 0,6, прямая $\delta L = \dfrac{\mu - 0{,}3}{2}$ — 25; 35; 45 % при $\mu = 0{,}8$; 1,0; 1,2: все семь точек таблицы совпадают.

Смысл: при лёгком грузе растянут только верх пружины, при $\mu \geq f_0$ — вся.

Ответ. 1) $y = \Delta L\left(1 + \dfrac{F - F_0}{kL_0}\right)$; 2) $L_1 = \left(\dfrac{3}{2} + \mu - f_0\right)L_0$; 3) $L_2 = L_0\left[1 + \dfrac{(1-f_0)^2}{2\gamma}\right]$; 4) $\gamma = 2, f_0 = 0{,}8$.