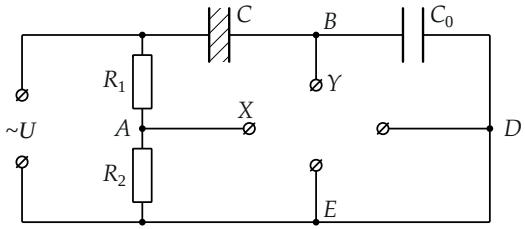
Диэлектрический гистерезис

Задача 5. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 5] В плоском нелинейном конденсаторе пространство между обкладками заполнено нелинейным диэлектриком, поэтому зависимость заряда конденсатора от напряжения между обкладками может быть более сложной, чем в линейном случае, для которого $q = CU$. При циклическом изменении напряжения зависимость $q(U)$ для нелинейного конденсатора имеет вид петли гистерезиса.

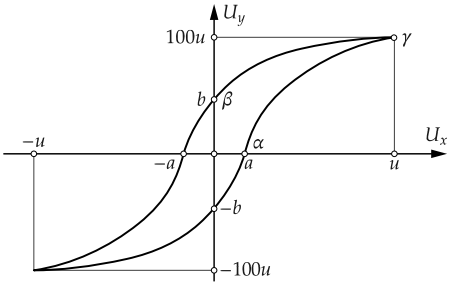
1. Для изучения свойств нелинейного конденсатора C собрали цепь, изображённую на рисунке.



Ёмкость обычного (линейного) эталонного конденсатора C_0 удовлетворяет сильному неравенству $C_0 \gg \dfrac{100S\varepsilon_0}{d}$, где d и S — расстояние между обкладками нелинейного конденсатора и их площадь. Сопротивления резисторов подобраны так, что выполняется равенство

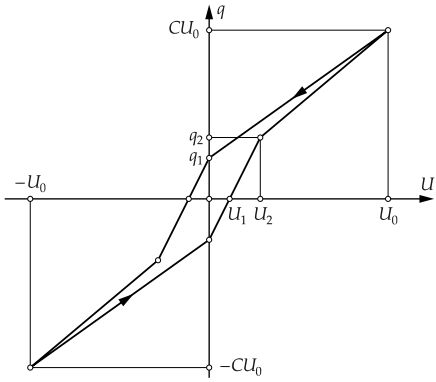
$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{S\varepsilon_0}{dC_0}$$

На вход цепи подаётся гармоническое напряжение $U(t)$. К точкам A и B подключены выводы пластин осциллографа, отклоняющих луч по горизонтали и вертикали соответственно. На экране осциллографа наблюдается зависимость напряжения $U_y = \varphi_B - \varphi_E$ между точками B и E от напряжения $U_x = \varphi_A - \varphi_D$ между точками A и D, изображённая на рисунке. Подключение осциллографа не меняет распределение токов и потенциалов в цепи.



Определите абсолютную величину поверхностной плотности поляризационных зарядов $|\sigma_p|$ на одной из сторон диэлектрической пластины (соприкасающейся с обкладкой конденсатора) в состояниях, соответствующих точкам α, β, γ на графике. Найдите напряжённость поля в диэлектрике в состояниях α и γ. Площадь обкладок нелинейного конденсатора S, ёмкость C_0 эталонного конденсатора, обозначенные на графике параметры петли a, b, u считаются известными. Электрическая постоянная равна ε_0.

2. Другой нелинейный конденсатор подключают последовательно с резистором сопротивлением R к генератору прямоугольных импульсов с частотой n, напряжение между выводами которого в течение первой половины периода равно U_0, а в течение второй половины периода равно $-U_0$. В установившемся режиме заряд одной из обкладок конденсатора q в зависимости от напряжения между обкладками U изменяется так, как показано на графике, приведённом на рисунке ниже.



Параметры петли гистерезиса, обозначенные на графике, равны $U_1 = 0{,}1U_0$, $U_2 = 0{,}25U_0$, $q_1 = 2CU_1$, $q_2 = q_1 + 0{,}1CU_0$. Значения U_0 и C известны, при этом $nRC \ll 1$. Найдите среднюю за период мощность, потребляемую цепью от генератора и среднюю мощность, выделяющуюся на резисторе. Ответы выразите через параметры C, U_0, n.

▲ **Решение. Что происходит.** Пункт 1. На вход X идёт доля $k = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ напряжения источника, на вход Y — напряжение на эталонном конденсаторе, то есть заряд цепочки q/C_0 (в последовательной цепи заряды C и C_0 равны). Поэтому петля на экране — петля $q(U)$ нелинейного конденсатора в масштабах $q = C_0U_y$, $U = U_x/k$. Дальше — электростатика плоского слоя: поле в диэлектрике равно полю свободных зарядов обкладок за вычетом поля поляризационных. Пункт 2. Энергия в конденсаторе за период не накапливается: работа генератора идёт в тепло на резисторе и в потери при переполяризации диэлектрика, равные площади петли.

Пункт 1.

1. Что показывают U_x и U_y (рис. 2). Точки D и E лежат на одном проводе, поэтому $U_x = \varphi_A - \varphi_D$ — напряжение на R_2, а $U_y = \varphi_B - \varphi_E$ — напряжение на C_0:

$$U_x = kU, \qquad U_y = \frac{q}{C_0}, \qquad k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{S\varepsilon_0}{dC_0}.$$

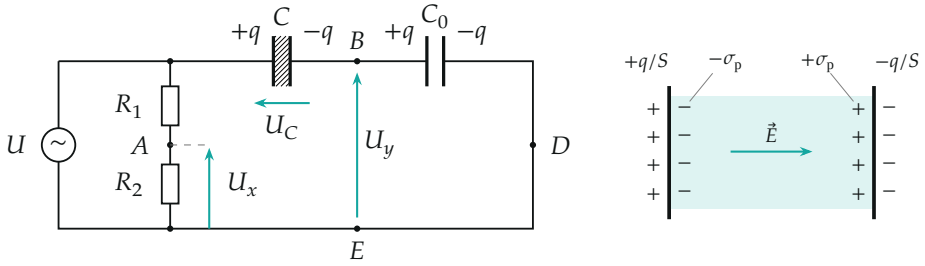


Рис. 2. Слева: $U = U_C + U_y$; $U_x = kU$ — напряжение на R_2, U_y — на C_0;

заряды C и C_0 одинаковы. Справа: поле E в слое создают свободные заряды обкладок и поляризационные заряды граней противоположного знака.

2. Поле в диэлектрике. Из $U = U_C + U_y$ получаем $U_C = \dfrac{U_x}{k} - U_y$; поле в слое однородно, $E = U_C/d$, а $\dfrac{1}{k} = \dfrac{dC_0}{S\varepsilon_0}$:

$$E = \frac{C_0 U_x}{S\varepsilon_0} - \frac{U_y}{d}.$$

3. Поляризационные заряды. Поле плоского слоя — разность полей двух плоскостей: свободных зарядов обкладки, плотность q/S, и поляризационных зарядов прилегающей грани диэлектрика, плотность $-\sigma_\text{p}$ противоположного знака (рис. 2, справа). Поэтому $E = \dfrac{q/S - \sigma_\text{p}}{\varepsilon_0}$ и

$$\sigma_\text{p} = \frac{q}{S} - \varepsilon_0 E = \frac{C_0}{S}\,(U_y - U_x) + \frac{\varepsilon_0}{d}\,U_y.$$

Последнее слагаемое меньше первого примерно в k раз, а по условию $k < \dfrac{1}{100}$, поэтому его отбрасываем: $\sigma_\text{p} \approx \dfrac{C_0}{S}(U_y - U_x)$.

4. Три точки петли.

Точка α: $U_x = a, U_y = 0$. Заряд $q = C_0 U_y = 0$: обкладки не заряжены, и поле создают только поляризационные заряды. Формулы дают точно

$$E^{(\alpha)} = \frac{C_0 a}{S\varepsilon_0}, \qquad |\sigma_\text{p}^{(\alpha)}| = \frac{C_0 a}{S}.$$

Точка β: $U_x = 0$, $U_y = b$: напряжение источника равно нулю, заряд $q = C_0 b$. Тогда

$$|\sigma_\text{p}^{(\beta)}| = \frac{C_0 b}{S}.$$

Поле в диэлектрике здесь $|E^{(\beta)}| = \dfrac{b}{d}$ — ничтожное: поляризационный заряд почти полностью компенсирует свободный.

Точка γ: $U_x = u$, $U_y = 100u$, заряд $q = 100C_0u$:

$$E^{(\gamma)} = \frac{C_0u}{S\varepsilon_0} - \frac{100u}{d} \approx \frac{C_0u}{S\varepsilon_0}, \qquad |\sigma_\text{p}^{(\gamma)}| = \frac{C_0}{S}(100u - u) = \frac{99C_0u}{S}.$$

Поправка в $E^{(\gamma)}$ составляет $100k < 1\,\%$.

Обратите внимание: U_x — не напряжение на нелинейном конденсаторе, а доля k напряжения на всей цепочке. Напряжение на нём $U_C = U_x/k - U_y$; в точке β оно равно $-b$, хотя $U_x = 0$.

Проверка. Размерность: C_0U/S — заряд на площадь. Предел: линейный диэлектрик — петля сжимается в прямую, $a = b = 0$, и σ_p в точках α, β равна нулю.

Пункт 2.

5. Установившийся режим. При $nRC \ll 1$ заряд успевает установиться за малую долю полупериода: ток течёт лишь вблизи переключений, а между ними конденсатор имеет напряжение генератора, $U = \pm U_0$, $q = \pm CU_0$ — это угловые точки петли. При переключении состояние перемещается по ветви петли от одного угла к другому (рис. 3).

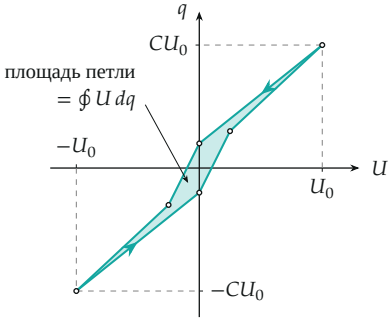


Рис. 3. Петля $q(U)$ по параметрам задачи; стрелки — обход. Площадь — потери в диэлектрике за период.

6. Работа генератора. За полпериода через генератор проходит заряд $2CU_0$ (от $-CU_0$ до $+CU_0$) при постоянном напряжении U_0, поэтому $A_{1/2} = U_0 \cdot 2CU_0 = 2CU_0^2$. За период работа в два раза больше, а мощность — работа за период, умноженная на частоту:

$$A_\text{г} = 4CU_0^2, \qquad P_\text{г} = A_\text{г}\,n = 4CU_0^2n.$$

7. Куда уходит энергия. За период конденсатор возвращается в прежнее состояние, запас энергии в нём не меняется, поэтому работа генератора равна теплу Q_R плюс работе сил поля над нелинейным диэлектриком за цикл: $A_\text{г} = Q_R + W_\text{п}$. На малом переносе dq эта работа равна $U\,dq$, за цикл $W_\text{п} = \oint U\,dq$ — площадь петли (обход против часовой стрелки, $W_\text{п} > 0$).

8. Площадь петли. Нижняя ветвь — верхняя, повёрнутая на 180° вокруг начала координат, поэтому площадь равна удвоенному $\int q\,dU$ по верхней ветви — ломаной $(U_0;\, CU_0)$, $(0;\, q_1)$, $(-U_2;\, -q_2)$, $(-U_0;\, -CU_0)$, где $q_1 = 0{,}2\,CU_0$, $q_2 = 0{,}3\,CU_0$. Для каждого прямого участка интеграл — ширина, умноженная на среднюю высоту (трапеция):

$$\int q\,dU = \frac{CU_0 + q_1}{2}\,U_0 - \frac{q_2 - q_1}{2}\,U_2 - \frac{CU_0 + q_2}{2}\,(U_0 - U_2)$$
$$= 0{,}6\,CU_0^2 - 0{,}0125\,CU_0^2 - 0{,}4875\,CU_0^2 = 0{,}1\,CU_0^2.$$

Площадь петли $W_\text{п} = 2 \cdot 0{,}1\,CU_0^2 = 0{,}2\,CU_0^2$.

9. Тепло на резисторе.

$$Q_R = A_\text{г} - W_\text{п} = 4CU_0^2 - 0{,}2\,CU_0^2 = 3{,}8\,CU_0^2, \qquad P_R = 3{,}8\,CU_0^2\,n.$$

Обратите внимание: площадь петли — потери в диэлектрике, а не тепло на резисторе.

Проверка. Независимый способ: тепло на резисторе при переходе из $-U_0$ в $+U_0$ равно $\int I^2R\,dt = \int (U_0 - U)\,dq$, так как $IR = U_0 - U$. Берём нижнюю ветвь: $\int U\,dq = 0{,}1\,CU_0^2$ (трапеции по ломаной), и $Q_{1/2} = U_0 \cdot 2CU_0 - 0{,}1\,CU_0^2 = 1{,}9\,CU_0^2$; за период $3{,}8\,CU_0^2$ — совпало.

Смысл: в диэлектрик уходит лишь 5 % работы генератора.

Ответ. 1) $|\sigma_\text{p}^{(\alpha)}| = \dfrac{C_0 a}{S}$, $|\sigma_\text{p}^{(\beta)}| = \dfrac{C_0 b}{S}$, $|\sigma_\text{p}^{(\gamma)}| = \dfrac{99C_0 u}{S} \approx \dfrac{100C_0 u}{S}$; $E^{(\alpha)} = \dfrac{C_0 a}{S\varepsilon_0}$, $E^{(\gamma)} = \dfrac{C_0 u}{S\varepsilon_0}$; 2) $P_\text{г} = 4CU_0^2 n$, $P_R = 3{,}8\,CU_0^2 n$.