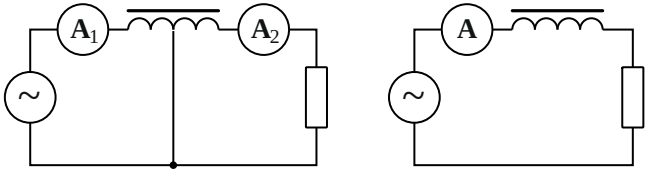
Как в трансформаторе

Задача 6. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 6] Катушка намотана на тороидальный сердечник с большой магнитной проницаемостью. К витку в середине катушки присоединён провод, и собрана цепь, показанная на рисунке слева. Напряжение на выводах идеального генератора меняется по гармоническому закону, амплитуда не зависит от подключаемой нагрузки, внутреннее сопротивление пренебрежимо мало. Идеальные амперметры переменного тока A_1 и A_2 показывают токи I_1 и I_2.



Что показывает идеальный амперметр переменного тока в цепи на рисунке справа, если эта цепь составлена из тех же элементов, что и цепь на рисунке слева?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на катушку с сердечником без рассеяния: один и тот же магнитный поток Φ пронизывает каждый виток, поэтому на каждом витке одна и та же ЭДС индукции $-\dot{\Phi}$. Генератор подключён к одной половине катушки, а его внутреннего сопротивления и сопротивления провода нет, значит, напряжение на половине в точности равно напряжению генератора: оно задаёт $\dot{\Phi}$ и не зависит от нагрузки. Вторая половина (те же витки, тот же поток) работает как источник такого же напряжения для резистора — как вторичная обмотка трансформатора. Ток первой половины складывается из тока нагрузки и тока намагничивания; по двум показаниям I_1, I_2 находим сопротивление нагрузки и индуктивность, а затем — ток в правой цепи.

Обозначения. N — число витков катушки, на каждой половине $N/2$ витков; Φ — поток через один виток; $u = U\cos\omega t$ — напряжение генератора, U — его амплитуда (одна и та же в обеих цепях); R — сопротивление нагрузки; i_1 — ток в первой половине, i_2 — ток во второй, оба считаем положительными, когда идут вдоль намотки (на рис. 2 —

слева направо). Амперметры показывают действующие значения, а они пропорциональны амплитудам; множитель $1/\sqrt{2}$ в ответе сократится, поэтому всюду пишем амплитуды: I_1, I_2 — амплитуды i_1, i_2.

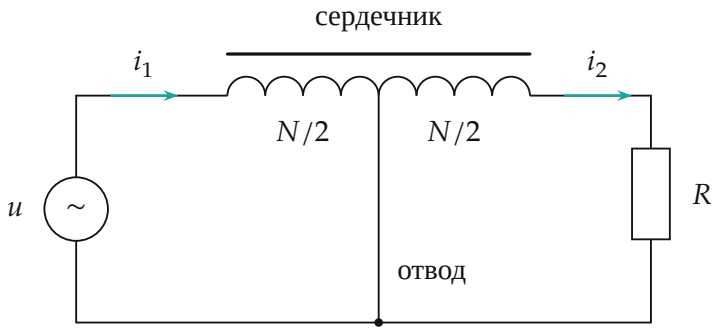


Рис. 2. Левая цепь: генератор подключён к первой половине катушки, нагрузка — ко второй; положительные направления токов i_1 и i_2 — вдоль намотки.

1. Напряжение на первой половине. Провод катушки сопротивления не имеет, генератор идеальный, поэтому напряжение генератора равно ЭДС индукции в первой половине, взятой с обратным знаком. По закону Фарадея для $N/2$ витков, через каждый из которых проходит поток Φ,

$$u = \frac{N}{2}\dot{\Phi}.$$

Скорость изменения потока определяется только генератором.

2. Нагрузка. Вторая половина — ещё $N/2$ витков в том же сердечнике, поток тот же, значит, в ней возникает ЭДС $-\frac{N}{2}\dot{\Phi} = -u$. У провода нет сопротивления, поэтому напряжение на нагрузке равно этой ЭДС, и по закону Ома для резистора

$$Ri_2 = -u, \qquad I_2 = \frac{U}{R}.$$

Знак «минус» говорит, что в момент, когда $u > 0$, ток i_2 идёт против положительного направления: вторая половина действительно отдаёт энергию нагрузке. Показание A_2 не зависит от A_1 и от свойств катушки: ток нагрузки задан только генератором и R.

3. Поток и ток намагничивания. Поток в сердечнике создают токи обеих половин: по закону полного тока для средней линии сердечника намагничивающая сила равна $\frac{N}{2}(i_1 + i_2)$, поскольку обе половины намотаны в одну сторону. Если обозначить $\mathcal{R}_m$ магнитное сопротивление сердечника ($\mathcal{R}_m$ мало, у сердечника большая проницаемость, но не нуль), то

$$\Phi = \frac{N(i_1 + i_2)}{2\mathcal{R}_m}.$$

Подставим в пункт 1:

$$u = \frac{N^2}{4\mathcal{R}_m}\frac{d(i_1 + i_2)}{dt} = L_h \frac{di_\mu}{dt}, \qquad i_\mu = i_1 + i_2, \qquad L_h = \frac{N^2}{4\mathcal{R}_m}.$$

Смысл L_h: при $i_2 = 0$ получаем $u = L_h\, di_1/dt$, то есть L_h — индуктивность одной половины, включённой отдельно. Ток i_μ — ток намагничивания: тот, что создаёт поток в сердечнике.

4. Связь I_1 и I_2. Из пунктов 2 и 3

$$i_1 = i_\mu - i_2 = i_\mu + \frac{u}{R}.$$

Слагаемое u/R колеблется в фазе с u. Ток через индуктивность при $u = U\cos\omega t$ равен $i_\mu = \frac{U}{\omega L_h}\sin\omega t$: он отстаёт от напряжения на четверть периода, $I_\mu = \frac{U}{\omega L_h}$. Колебания, сдвинутые на 90°, складываются как катеты прямоугольного треугольника (рис. 3), поэтому

$$I_1^2 = I_2^2 + I_\mu^2, \qquad I_\mu^2 = I_1^2 - I_2^2.$$

Иначе: левая цепь при действии генератора ведёт себя как параллельное соединение индуктивности L_h и резистора R (рис. 3, слева); A_1 измеряет полный ток, A_2 — ток резистора.

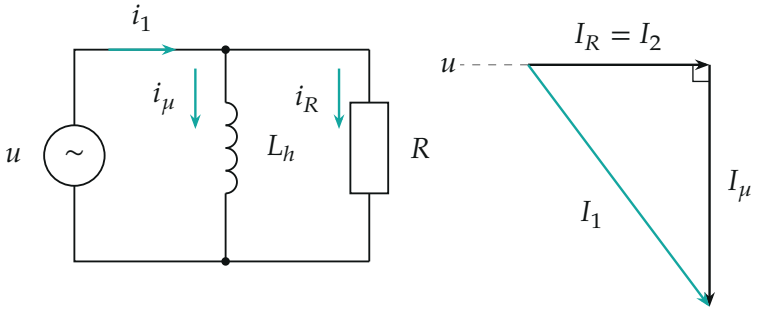


Рис. 3. Слева — эквивалентная схема левой цепи: $i_1 = i_\mu + i_R$, $i_R = -i_2$. Справа — векторная диаграмма амплитуд (для рисунка $I_2 = 3$, $I_1 = 5$ в условных единицах, тогда $I_\mu = 4$); ток резистора в фазе с u (штрих — направление u), ток намагничивания отстаёт на $90°$.

5. Что известно о цепи. Из пунктов 2 и 4

$$R = \frac{U}{I_2}, \qquad \omega L_h = \frac{U}{I_\mu} = \frac{U}{\sqrt{I_1^2 - I_2^2}}.$$

Два показания амперметров дают два параметра цепи в единицах U — как раз столько, сколько нужно.

6. Правая цепь. Здесь генератор, вся катушка и та же нагрузка соединены последовательно. Индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков при неизменном сердечнике: для целой катушки $L = \dfrac{N^2}{\mathcal{R}_m} = 4L_h$. Для последовательной цепи с L и R амплитуда тока (напряжения на R и L сдвинуты на $90°$ и складываются как катеты, рис. 4)

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{I^2} = \frac{R^2 + 16(\omega L_h)^2}{U^2}.$$

Обратите внимание: индуктивность всей катушки в *четыре* раза больше индуктивности половины, а не в два: $L \propto N^2$ (у целой катушки вдвое больше витков и вдвое больше поток через каждый из них).

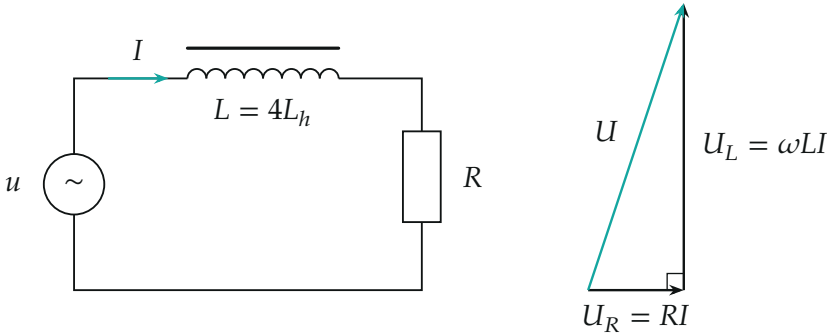


Рис. 4. Правая цепь и треугольник амплитуд напряжений: U_R в фазе с током, U_L опережает его на 90°, их «сумма» — напряжение генератора U (для рисунка $I_2 = 3$, $I_1 = 5$, как на рис. 3: $U_R : U_L = 1 : 3$).

7. Ответ. Подставим пункт 5:

$$\frac{1}{I^2} = \frac{1}{I_2^2} + \frac{16}{I_1^2 - I_2^2} = \frac{I_1^2 - I_2^2 + 16I_2^2}{I_2^2\,(I_1^2 - I_2^2)} = \frac{I_1^2 + 15I_2^2}{I_2^2\,(I_1^2 - I_2^2)},$$

откуда

$$I = I_2\sqrt{\frac{I_1^2 - I_2^2}{I_1^2 + 15I_2^2}}.$$

Матрёшка: $I \to (R,\ \omega L) \to (I_2,\ I_\mu) \to (I_2,\ I_1)$.

Проверка. Размерность: под корнем отношение квадратов токов, результат — ток. Пределы: если $I_1 \to I_2$ ($I_\mu \to 0$, то есть $L_h \to \infty$), то $I \to 0$ — у правой цепи бесконечное индуктивное сопротивление; если $I_1 \gg I_2$ ($L_h \to 0$), то $I \to I_2 = U/R$ — катушка не мешает, ток ограничивает только R. Второй способ: численный расчёт двух связанных катушек с коэффициентом связи 1 (взято $R = 2{,}3$, $\omega L_h = 0{,}37$, $U = 1$ — в тех же условных единицах): левая цепь даёт $I_1 = 2{,}737$, $I_2 = 0{,}435$, правая — $I = 0{,}3656$ напрямую и по формуле ответа.

Смысл: катушка с сердечником — трансформатор $1 : 1$ с конечной индуктивностью; присоединив нагрузку к другой её половине, мы не меняем поток, но добавляем ток нагрузки к току намагничивания.

Ответ. $I = I_2\sqrt{\dfrac{I_1^2 - I_2^2}{I_1^2 + 15I_2^2}}$.