Излучает и падает

Задача 7. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 7] В соответствии с законами классической электродинамики заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Релятивистские эффекты в этой задаче не учитываются. Масса и модуль заряда электрона, скорость света в вакууме и электрическая постоянная равны m_e, e, c и ε_0 соответственно.

1) Пусть электрон движется вокруг протона по орбите, близкой к круговой. Протон считаем неподвижным, поскольку его масса много больше m_e. Известно, что мощность излучения движущегося электрона даётся формулой

$$P = A \cdot e^{\alpha} c^{\beta} \varepsilon_0^{\gamma} a^{\delta},$$

где a — ускорение электрона, A — безразмерная константа. Определите показатели степени: α, β, γ, δ.

2) В процессе излучения энергия электрона уменьшается, поэтому он должен двигаться не по окружности, а по спирали и в некоторый момент времени должен упасть на протон. Предполагая, что за время, равное периоду обращения электрона, расстояние R между электроном и протоном изменяется незначительно, а также считая известной постоянную A в приведённой выше формуле, определите время Δt, за которое расстояние R уменьшается от известного значения R_0 на ΔR, при условии, что $\Delta R \ll R_0$. Найдите время $t_{1/2}$, за которое расстояние R уменьшается от значения R_0 до значения $\dfrac{R_0}{2}$.

Указание. Может оказаться полезной формула

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \left(b^{n+1} - a^{n+1} \right), \qquad n \neq -1.$$

▲ **Решение. Что происходит.** Пункт 1 — анализ размерностей: мощность излучения составляется из e, c, ε_0 и a единственным способом. В

пункте 2 электрон теряет энергию на излучение, и радиус орбиты медленно уменьшается: электрон идёт по спирали. За один оборот R почти не меняется, поэтому в каждый момент орбиту можно считать круговой с текущим радиусом R: на такой орбите ускорение, скорость и энергия выражаются через R. Главная идея — скорость убыли энергии электрона равна мощности излучения, $dE/dt = -P$; это уравнение для $R(t)$ с разделяющимися переменными.

Обозначения. R — расстояние от электрона до протона (радиус орбиты), v — скорость электрона, E — его полная энергия в поле протона (потенциальная энергия на бесконечности равна нулю), $m = m_e$.

Пункт 1.

1. Размерности. В СИ $[e] =$ Кл, $[\varepsilon_0] =$ Кл^{2}с^2/(кг $\cdot$ м^3) (из закона Кулона $F = e^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$), $[c] =$ м/с, $[a] =$ м/с^2, $[P] =$ кг $\cdot$ м^2/с^3. Приравняем показатели степеней у каждой единицы в левой и правой частях формулы:

$$\begin{aligned} \text{кг:}\quad & 1 = -\gamma, \\ \text{Кл:}\quad & 0 = \alpha + 2\gamma, \\ \text{м:}\quad & 2 = \beta + \delta - 3\gamma, \\ \text{с:}\quad & -3 = -\beta - 2\delta + 2\gamma. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений $\gamma = -1$, $\alpha = 2$. Остаётся $\beta + \delta = -1$ и $\beta + 2\delta = 1$, откуда $\delta = 2$, $\beta = -3$:

$$P = A\,\frac{e^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3}.$$

2. Второй способ для δ. Поле излучения пропорционально ускорению заряда, а мощность волны — квадрату поля, значит $P \propto a^2$: $\delta = 2$, как и получилось.

Пункт 2.

3. Круговая орбита. Запишем второй закон Ньютона для электрона в проекции на направление к протону: кулоновская сила притяжения

сообщает центростремительное ускорение,

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mR}, \qquad a = \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mR^2}.$$

Обратите внимание: это ускорение в формуле для P — полное; добавка из-за медленного уменьшения R (касательная составляющая) мала, так как за оборот радиус почти не меняется — это и сказано в условии.

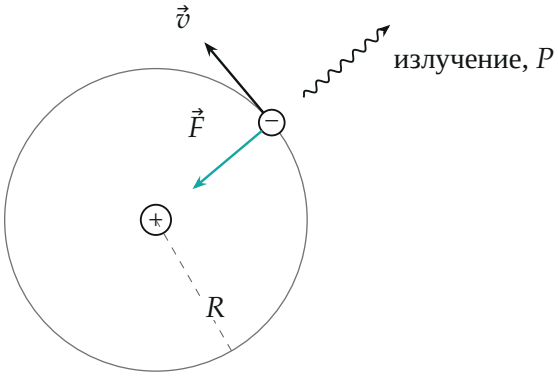


Рис. 1. Электрон на почти круговой орбите: скорость $\vec{v}$ по касательной, сила притяжения $\vec{F}$ к протону (ускорение $\vec{a}$ направлено так же, как $\vec{F}$); при движении с ускорением электрон излучает.

4. Энергия. Полная энергия — кинетическая плюс потенциальная энергия кулоновского притяжения:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Чем меньше R, тем меньше (отрицательнее) энергия — радиус уменьшается именно из-за потерь на излучение.

5. Мощность излучения на орбите радиуса R. Подставим a из пункта 3 в формулу пункта 1:

$$P = \frac{Ae^2}{\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 R^4} = \frac{Ae^6}{16\pi^2\varepsilon_0^3 c^3 m^2 R^4}.$$

Чем ближе к протону, тем сильнее излучение: $P \propto R^{-4}$.

6. Баланс энергии. За малое время dt электрон излучает энергию $P\,dt$, и его энергия на столько же уменьшается: $dE = -P\,dt$. Энергия зависит от R, поэтому $dE = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\,dR$, и

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\,\frac{dR}{dt} = -P \quad \Rightarrow \quad R^2\,\frac{dR}{dt} = -\frac{8\pi\varepsilon_0}{e^2}\,R^4 P = -K,$$

$$K = \frac{Ae^4}{2\pi\varepsilon_0^2 c^3 m^2}.$$

Постоянная $K > 0$ составлена только из постоянных величин, $dR/dt < 0$ — радиус уменьшается. Скорость падения $|dR/dt| = K/R^2$ растёт при уменьшении R: электрон падает всё быстрее (рис. 2 и 3).

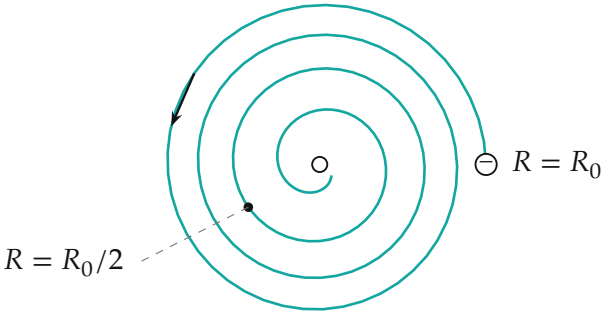


Рис. 2. Спираль падения электрона на протон (схематично: в действительности витков порядка 10^5, здесь — четыре). Радиус по закону пункта 8; последняя половина радиуса проходится за $1/8$ полного времени. В центре — протон.

7. Малое изменение радиуса. Пока $\Delta R \ll R_0$, множитель R^2 в уравнении можно заменить на R_0^2, и скорость $dR/dt \approx -K/R_0^2$ постоянна. Радиус уменьшился на ΔR за время

$$\Delta t = \frac{R_0^2\,\Delta R}{K} = \frac{2\pi c^3 \varepsilon_0^2 m^2}{Ae^4}\,R_0^2\,\Delta R.$$

8. До половины радиуса. Разделим переменные, $R^2 dR = -K\,dt$, и проинтегрируем от начала ($t = 0$, $R = R_0$) до момента $t_{1/2}$ ($R = R_0/2$); интеграл по R берём по формуле из указания при $n = 2$:

$$\int_{R_0}^{R_0/2} R^2\,dR = -K\,t_{1/2} \quad\Rightarrow\quad t_{1/2} = \frac{1}{K}\int_{R_0/2}^{R_0} R^2\,dR,$$

$$t_{1/2} = \frac{1}{3K}\Big(R_0^3 - \frac{R_0^3}{8}\Big) = \frac{7R_0^3}{24K}.$$

Подставим K:

$$t_{1/2} = \frac{7}{24}\cdot\frac{2\pi c^3\varepsilon_0^2 m^2}{Ae^4}\,R_0^3 = \frac{7}{12}\cdot\frac{\pi c^3\varepsilon_0^2 m^2}{Ae^4}\,R_0^3.$$

Для полного падения ($R \to 0$) тот же интеграл даёт $T = \dfrac{R_0^3}{3K}$, то есть $t_{1/2} = \dfrac{7}{8}T$ (рис. 3).

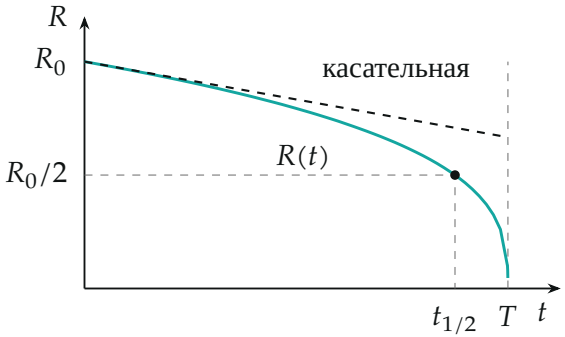


Рис. 3. $R(t) = R_0(1-t/T)^{1/3}$: радиус убывает всё круче, у $t = T$ касательная вертикальна. Пунктирная прямая — линеаризация пункта 7 ($R = R_0 - Kt/R_0^2$): она близка к кривой только при малых ΔR.

Проверка. Размерность K должна совпасть с $[R^2\dot{R}] = \text{м}^3/\text{с}$:

$$\Big[\frac{e^4}{\varepsilon_0^2 c^3 m^2}\Big] = \frac{(\text{Н}\cdot\text{м}^2)^2}{(\text{м}^3/\text{с}^3)\,\text{кг}^2} = \frac{\text{м}^3}{\text{с}},$$

значит Δt и $t_{1/2}$ — времена. Предел: $(R_0^3 - (R_0 - \Delta R)^3)/3 \approx R_0^2 \Delta R$ при $\Delta R \ll R_0$ — интегрирование из пункта 8 для малого ΔR возвращает Δt из пункта 7. Оценка: известная из электродинамики формула Лармора даёт $A = 1/(6\pi)$ (в условии её нет, берём только для оценки); при $R_0 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ м получаем $t_{1/2} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-11}$ с, а период обращения $\approx 1{,}5 \cdot 10^{-16}$ с — электрон успевает сделать около $9 \cdot 10^4$ оборотов, так что допущение о малом изменении R за оборот выполнено.

Смысл: по классической теории атом нестабилен — электрон падает на ядро за время порядка 10^{-11} с; последняя половина радиуса занимает лишь одну восьмую этого времени.

Ответ. 1) $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = -1$, $\delta = 2$; 2) $\Delta t = \dfrac{2\pi c^3 \varepsilon_0^2 m_e^2}{Ae^4} R_0^2 \Delta R$; $t_{1/2} = \dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{\pi c^3 \varepsilon_0^2 m_e^2}{Ae^4} \cdot R_0^3$.