Похоже на диод

Задача 8. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 8] Две плоские металлические пластины площадью S располагаются параллельно друг другу в точках с координатами $x = 0$ (первая пластина) и $x = d$ (вторая пластина) при этом $S \gg d^2$. Ось OX перпендикулярна пластинам. Первая пластина заземлена, потенциал второй пластины равен $-U_0$. Пространство между пластинами заполнено полупроводником, в котором носителями заряда являются частицы с зарядом q ($q > 0$). Ток в полупроводнике — это коллективное, направленное движение этих частиц. Диэлектрическая проницаемость полупроводника равна единице. Электрическая постоянная равна ε_0.

1) При больших значениях U_0 движение носителей заряда определяется действием электрических сил и сил сопротивления. Можно считать, что средняя скорость движения носителей в направлении поля в точке с координатой x в пространстве между пластинами пропорциональна напряжённости в этой точке $v(x) = \mu E(x)$, где μ — известная константа.

   Пусть ток между пластинами установился, средняя скорость носителей $v(x)$, плотность заряда $\rho(x)$ и потенциал $U(x)$ не меняются со временем. Предполагая, что потенциал зависит от координаты по степенному закону $U(x) = Ax^\alpha$, определите значения постоянных A и α. Найдите ток между пластинами. Считайте известными значения параметров U_0, μ, d и S.

2) При небольших значениях U_0 движение носителей обусловлено диффузией. Сила тока в этом случае удовлетворяет соотношению

$$I = -S\left(\frac{\mu k T}{q}\right)\frac{d\rho}{dx},$$

   где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Пусть ток между пластинами установился. Предполагая степенную зависимость потенциала от координаты $U(x) = Bx^\beta$, определите значения постоянных B и β. Найдите силу тока. Считайте известными значения параметров U_0, μ, d, q, T и S.

3) Какому сильному неравенству вида

$$U_0 \ll f(q, \mu, T)$$

должно удовлетворять значение потенциала U_0, чтобы его можно было считать небольшим, как в пункте 3b?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пластины большие ($S \gg d^2$), поэтому поле и заряды зависят только от x, а краевыми эффектами можно пренебречь. Для установившегося тока нужны три связи: ток через любое сечение один и тот же (заряд между пластинами не копится); теорема Гаусса связывает плотность заряда с полем; поле — это минус производная потенциала. Степенной закон $U(x)$ превращает эти уравнения в алгебраические, а показатель степени определяется требованием, чтобы ток не зависел от x. Это задача на установившийся ток с объёмным зарядом: заряд носителей сам создаёт поле, которое их ведёт.

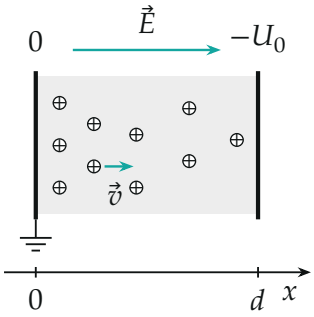


Рис. 1. Плоский конденсатор с носителями заряда $q > 0$: первая пластина заземлена, вторая — при потенциале $-U_0$; поле $\vec{E}$ направлено вдоль оси x, носители движутся по полю (густота точек — схема пункта 1: у первой пластины носителей больше).

Обозначения. x — координата вдоль оси от первой пластины ко второй; $E(x)$ — проекция напряжённости на ось x; $\rho(x)$ — объёмная плотность заряда; I — сила тока вдоль оси x (положительная, когда положительные заряды идут от первой пластины ко второй). Штрих — производная по x.

Общие соотношения.

1. Потенциал и поле. $E = -U'$. Потенциал убывает от 0 до $-U_0$, поэтому $U' < 0$ и $E > 0$: поле направлено от первой пластины ко второй, положительные носители движутся туда же.

2. Теорема Гаусса для слоя. Возьмём слой между x и $x + dx$ площадью S. Поток вектора $\vec{E}$ через него равен $S\,dE$, заряд внутри $\rho S\,dx$, диэлектрическая проницаемость равна единице:

$$S\,dE = \frac{\rho S\,dx}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = \varepsilon_0 E' = -\varepsilon_0 U''.$$

3. Ток. Через сечение x за время dt проходит заряд $\rho v S\,dt$, поэтому $I = \rho v S$. Ток установился: заряд между пластинами не накапливается, значит I одинаков во всех сечениях и от x не зависит. Это условие и определяет показатели степени.

Пункт 1.

4. Ток через потенциал. Подставим $v = \mu E$ и пункт 2:

$$I = \mu S \rho E = \mu \varepsilon_0 S\,E\,E'.$$

5. Показатель α. Для $U = Ax^\alpha$: $E = -A\alpha\,x^{\alpha-1}$, $\rho = \varepsilon_0 E' = -\varepsilon_0 A\alpha(\alpha - 1)\,x^{\alpha-2}$, и

$$I = \mu S \rho E = \mu \varepsilon_0 S A^2 \alpha^2 (\alpha - 1)\,x^{2\alpha-3}.$$

Ток не зависит от x при $2\alpha - 3 = 0$:

$$\alpha = \frac{3}{2}.$$

($\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ дают нулевой ток: поле однородно, зарядов нет.)

6. Постоянная A и ток. При $x = d$ потенциал равен $-U_0$: $Ad^{3/2} = -U_0$,

$$A = -\frac{U_0}{d^{3/2}}.$$

Минус — потенциал убывает. Подставим в пункт 5 при $\alpha = \frac{3}{2}$ (здесь

$\alpha^2(\alpha-1)=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{8}$):

$$I=\frac{9}{8}\,\mu\varepsilon_0 S\,\frac{U_0^2}{d^3}.$$

Ток положителен: он идёт по полю, от первой пластины ко второй.

7. Тот же результат вторым способом. Не предполагая степенной закон: из пункта 4 $I=\dfrac{\mu\varepsilon_0 S}{2}\,\dfrac{d(E^2)}{dx}$, и при постоянном I

$$E^2=\frac{2I}{\mu\varepsilon_0 S}\,x+E(0)^2.$$

Степенному закону соответствует $E(0)=0$: $E=\sqrt{\dfrac{2I\,x}{\mu\varepsilon_0 S}}$ — ток ограничен собственным объёмным зарядом носителей. Потенциал второй пластины

$$U_0=\int\limits_0^d E\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2I}{\mu\varepsilon_0 S}}\;d^{3/2}\quad\Rightarrow\quad I=\frac{9\mu\varepsilon_0 S U_0^2}{8d^3}:$$

тот же результат.

Качественно: скорость $v\propto x^{1/2}$ растёт к второй пластине, ток один, поэтому $\rho\propto x^{-1/2}$ падает (рис. 2, слева): у первой пластины носителей много и они медленные, у второй — мало и быстрые.

Проверка пункта 1. Размерность: $\mu\,[\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})]\cdot\varepsilon_0\,[\text{Кл}/(\text{В}\cdot\text{м})]\cdot S\,[\text{м}^2]\cdot U_0^2/d^3\,[\text{В}^2/\text{м}^3]=\text{Кл}/\text{с}$ — ампер. $I\propto U_0^2$ — ток, ограниченный объёмным зарядом (закон Мотта — Герни), а не закон Ома.

Пункт 2.

8. Показатель β. Для $U=Bx^\beta$ по пункту 2 плотность заряда $\rho=-\varepsilon_0 U''=-\varepsilon_0 B\beta(\beta-1)\,x^{\beta-2}$, и

$$\frac{d\rho}{dx}=-\varepsilon_0 B\beta(\beta-1)(\beta-2)\,x^{\beta-3},$$

$$I=-S\frac{\mu kT}{q}\,\frac{d\rho}{dx}=\frac{\varepsilon_0\mu kTS}{q}\,B\beta(\beta-1)(\beta-2)\,x^{\beta-3}.$$

Ток не зависит от x при $\beta = 3$ ($\beta = 0, 1, 2$ дают нулевой ток):

$$\beta = 3, \qquad \rho = -6\varepsilon_0 B\, x, \qquad \frac{d\rho}{dx} = -6\varepsilon_0 B.$$

9. Постоянная B и ток. $Bd^3 = -U_0$, $B = -\dfrac{U_0}{d^3}$. Тогда

$$I = \frac{6\varepsilon_0 \mu k T S}{q}\, B = -\frac{6\varepsilon_0 \mu k T\, S\, U_0}{q\, d^3}.$$

Ток отрицателен: он идёт против оси x, от второй пластины к первой — носители диффундируют туда, где их меньше (плотность $\rho = 6\varepsilon_0 U_0 x/d^3$ растёт от нуля у первой пластины ко второй).

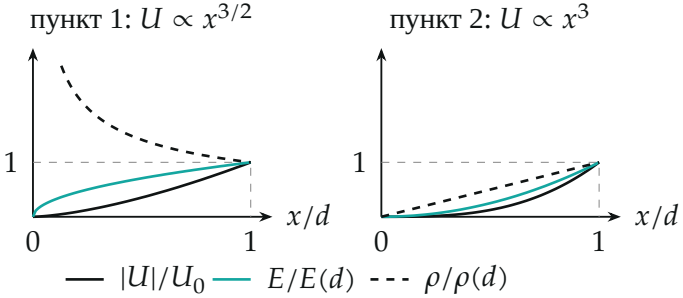


Рис. 2. Потенциал, поле и плотность заряда, каждая величина в долях своего значения у второй пластины. Слева $|U| \propto x^{3/2}$, $E \propto x^{1/2}$, $\rho \propto x^{-1/2}$ (у $x = 0$ ρ растёт без предела, обрезано); справа $|U| \propto x^3$, $E \propto x^2$, $\rho \propto x$.

Проверка пункта 2. Размерность та же (kT/q — вольты). Отношение токов $\dfrac{I_1}{|I_2|} = \dfrac{3qU_0}{16kT}$: мало при малых U_0 (диффузия сильнее), велико при больших (дрейф сильнее) — пункты согласованы с условием.

Пункт 3.

10. Что с чем сравнивать. Диффузионное решение пункта 2 верно, если дрейф носителей в поле им можно пренебречь. Сравним плотности тока (ток на единицу площади) — дрейфовую и диффузионную — для

решения пункта 2, где $E = -U' = \dfrac{3U_0x^2}{d^3}$, $\rho = \dfrac{6\varepsilon_0 U_0 x}{d^3}$:

$$j_{\text{др}} = \mu\rho E = \frac{18\,\mu\varepsilon_0 U_0^2 x^3}{d^6}, \qquad |j_{\text{диф}}| = \frac{\mu kT}{q}\left|\frac{d\rho}{dx}\right| = \frac{6\,\mu\varepsilon_0 U_0\, kT}{q\,d^3}.$$

11. Отношение.

$$\frac{j_{\text{др}}}{|j_{\text{диф}}|} = \frac{3qU_0}{kT}\left(\frac{x}{d}\right)^3 \le \frac{3qU_0}{kT}.$$

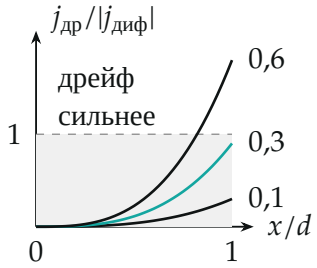


Рис. 3. Отношение дрейфовой плотности тока к диффузионной $3\,\dfrac{qU_0}{kT}\left(\dfrac{x}{d}\right)^3$ для $qU_0/kT = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}6$ (числа у кривых). Серая область — диффузия преобладает; чем меньше qU_0/kT, тем она шире.

Дрейф мал везде, если правая часть много меньше единицы; множитель 3 порядка не меняет:

$$U_0 \ll \frac{kT}{q}.$$

Физический смысл: энергия qU_0, которую носитель набирает в поле всего конденсатора, мала по сравнению с тепловой энергией kT, и главную роль играет диффузия. Результат от μ не зависит.

Обратите внимание: отношение зависит от x и наибольшее у второй пластины, поэтому достаточно потребовать малости при $x = d$ — тогда дрейф мал всюду.

Ответ. 1) $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $A = -\dfrac{U_0}{d^{3/2}}$, $I = \dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{\mu\varepsilon_0 S U_0^2}{d^3}$; 2) $\beta = 3$, $B = -\dfrac{U_0}{d^3}$, $I = -\dfrac{6\varepsilon_0 U_0 \mu kTS}{qd^3}$; 3) $U_0 \ll \dfrac{kT}{q}$.