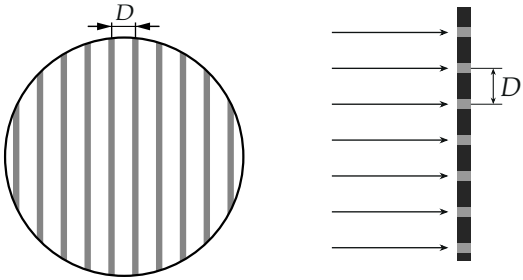
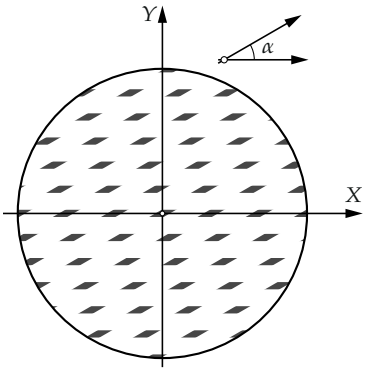
Решётки

Задача 10. [МОШ 2022/23, заключительный этап, 11 класс, задача 10] Дифракционная решётка (см. рисунок ниже) представляет собой непрозрачную пластинку, в которой с пространственным периодом D сделаны N ($N \gg 1$) узких прорезей (штрихов) толщиной h. Обратите внимание, на рисунке прозрачные области показаны серым. В первых двух пунктах этой задачи мы рассматриваем решётки, содержащие $n = 100$ штрихов на миллиметр, считая при этом, что $h = 0{,}1D$. Решётки располагаются параллельно экрану, на котором наблюдается дифракционная картина, на расстоянии $L = 3$ м от него. Экраном считается участок вертикальной стены высотой 1 м и шириной 2 м. Решётки освещаются лучом лазерной указки, параметры которой одинаковые для всех пунктов: диаметр пучка $d = 2$ мм, длина волны $\lambda = 532$ нм. В первых двух пунктах свет падает на решётки по нормали. Середины решётки и экрана лежат на одном перпендикуляре к плоскости экрана.



1) Пусть штрихи решётки ориентированы вертикально. При нормальном падении лазерного луча на решётку на экране наблюдается система ярких пятен. Сколько всего светлых пятен будет видно на экране? Чему будет равно расстояние между соседними пятнами вблизи центра экрана?
2) Пусть две дифракционные решётки накладываются друг на друга. Штрихи одной решётки располагаются горизонтально, а штрихи другой составляют угол α с горизонтальной прямой. В результате

получается непрозрачная пластинка, на которой периодически распределяются прозрачные области в виде параллелограммов. Схематично такая пластинка показана на рисунке ниже, тёмные параллелограммы символизируют прозрачные области.



При освещении такой двумерной решётки лазером на экране наблюдается система светлых пятен. Пусть на экране задана система координат YOX, направление осей OY и OX совпадает с направлением осей на рисунке, начало координат находится в центре экрана.

Пусть угол α равен $\dfrac{\pi}{2}$. Сделайте рисунок, изобразите дифракционную картину. Укажите координаты нескольких светлых пятен на экране, располагающихся вблизи начала координат.

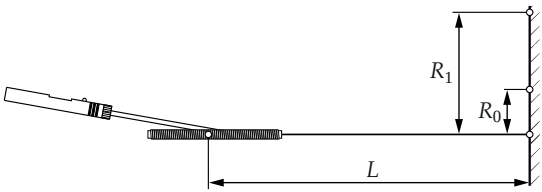
Изобразите схематично дифракционную картину и определите координаты светлых пятен для случая $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$.

3) Гитарная струна с оплёткой представляет собой отражательную дифракционную решётку. Оплётка — это тонкая проволока, навитая в один слой виток к витку на сердечник струны (см. рисунок).



При освещении горизонтально расположенной струны лучом лазерной указки, направленным под небольшим углом к горизонтали (см. рисунок, представленный ниже), на вертикальном экране, находящемся в 2–3 метрах от струны, наблюдается дифракционная карти-

на в виде концентрических полуокружностей. В эксперименте были измерены следующие величины: расстояние от точки падения лазерного луча на струну до стены $L = 2$ м, радиусы первых двух полуокружностей $R_0 = 4$ см, $R_1 = 12{,}5$ см. «Первых двух» означает наименьшей и следующей по размеру. Использовался тот же лазер, что и в предыдущих пунктах ($\lambda = 532$ нм). Определите по этим данным диаметр проволоки оплётки.



▲ **Решение. Что происходит.** Во всех трёх пунктах работает одно правило: решётка даёт максимум там, где волны от соседних штрихов складываются в фазе, то есть разность их хода равна целому числу длин волн. Это задача на дифракцию: в пункте 1 пятна стоят в ряд, в пункте 2 — двумерная решётка пятен, в пункте 3 (косое падение на витки струны) — конусы, на стене — окружности.

Обозначения. D — период решётки, θ_m — угол направления на максимум порядка m, L — расстояние до экрана, $u = \dfrac{L\lambda}{D}$ — единица длины для положений пятен.

Пункт 1.

1. Условие максимума. Период $D = \dfrac{1\text{ мм}}{100} = 10$ мкм. Пучок падает по нормали, поэтому волны от двух соседних штрихов выходят в фазе. В направлении θ волна от нижнего штриха проходит путь на $D\sin\theta$ больше (рис. 1, слева). Максимум — когда эта разность хода равна целому числу длин волн:

$$D\sin\theta_m = m\lambda, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \qquad \sin\theta_m = 0{,}0532\,m.$$

2. Положения пятен. Пятно порядка m лежит на экране на расстоянии $x_m = L\tan\theta_m$ от центра. Вблизи центра углы малы, $\tan\theta \approx \sin\theta$, и

$x_m \approx mu$: пятна стоят с шагом

$$\Delta x = u = \frac{L\lambda}{D} = \frac{3 \cdot 5{,}32 \cdot 10^{-7}}{1{,}0 \cdot 10^{-5}}\ \text{м} \approx 0{,}16\ \text{м} = 16\ \text{см}.$$

3. Сколько порядков на экране. Экран шириной 2 м: $|x| \le 1$ м, то есть $\tan\theta \le \frac{1}{3}$, $\sin\theta \le \frac{1}{\sqrt{10}} = 0{,}316$. Тогда $m \le \frac{0{,}316}{0{,}0532} = 5{,}9$: помещаются порядки $|m| \le 5$, всего 11 мест. Обратите внимание: по малоугловой формуле $x_m = 0{,}16\,m$ влезло бы и $m = 6$ (0,96 м), но у края экрана угол $\approx 18°$, и $\tan\theta \ne \sin\theta$: точно $x_6 = L\tan\theta_6 = 1{,}01$ м — за краем, 13 пятен получить нельзя.

4. Не погашен ли какой-то порядок. Каждый штрих — щель шириной h, и порядок m несёт долю света $\left[\frac{\sin(\pi mh/D)}{\pi mh/D}\right]^2$ — дифракция на одной щели. Она обращается в нуль, когда mh/D — целое, то есть при $h = 0{,}1D$ у порядков $m = \pm10, \pm20, \ldots$ Все они далеко за краем экрана, так что из 11 порядков не пропадает ни один. Доли для $m = 0, 1, \ldots, 5$: 1; 0,97; 0,88; 0,74; 0,57; 0,41 — пятна к краю тускнеют, но все видны: *на экране 11 светлых пятен* (рис. 1, справа).

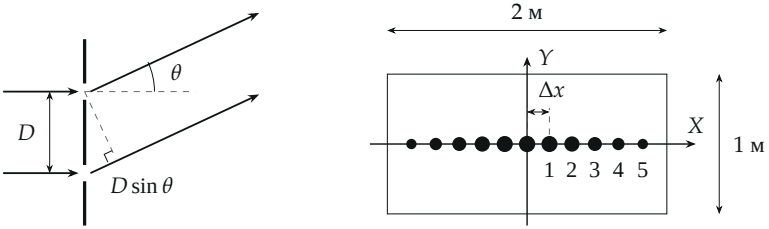


Рис. 1. Слева — разность хода $D\sin\theta$ (угол увеличен). Справа — экран 2×1 м: порядки $m = -5, \ldots, 5$, площадь пятна — яркость.

Пункт 2.

5. Две решётки подряд. Свет проходит сначала одну решётку, затем другую. Первая решётка (штрихи горизонтальны, нормаль к штрихам $\vec{n}_1 = (0, 1)$ вдоль оси Y) раскладывает пучок в вертикальный ряд пучков, смещённых на $m\,u\,\vec{n}_1$. Каждый из них вторая решётка раскладывает вдоль своей нормали: штрихи идут вдоль $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, поэтому нормаль

$\vec{n}_2 = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$, и порядок n смещает пятно ещё на $n\,u\,\vec{n}_2$. Углы малы (не больше 0,3 рад), и добавки к положению складываются как векторы:

$$(x, y) = u\,(m\vec{n}_1 + n\vec{n}_2) \quad \Rightarrow \quad x = nu\sin\alpha, \qquad y = u\,(m - n\cos\alpha),$$

где m и n — целые числа, $u = \dfrac{L\lambda}{D} \approx 16$ см.

6. Случай $\alpha = \pi/2$**.** $\vec{n}_2 = (1, 0)$, и $x = nu$, $y = mu$: пятна образуют квадратную решётку с шагом 16 см (рис. 2, слева). Вблизи начала координат: $(0;0)$, $(\pm16;0)$, $(0;\pm16)$, $(\pm16;\pm16)$ (см).

7. Случай $\alpha \neq \pi/2$**.** Пятна стоят в узлах косой решётки, построенной на двух векторах длиной u с углом $\pi - \alpha$ между ними: $\vec{e}_1 = u(0, 1)$ и $\vec{e}_2 = u(\sin\alpha, -\cos\alpha)$. Для $\alpha = 60°$ ближайшие к центру пятна, см (рис. 2, справа):

$$(0;\pm16), \quad (\pm13{,}8;\mp8{,}0), \quad (\pm13{,}8;\pm8{,}0).$$

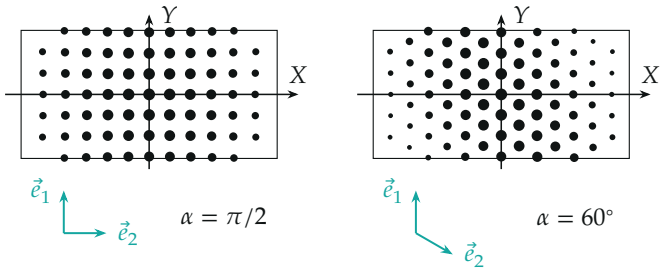


Рис. 2. Картина двух решёток на экране 2×1 *м;* $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = u = 16$ *см — шаг решётки пятен, площадь пятна — яркость.*

Проверка: при $\alpha \to 0$ решётки совпадают, $x = 0$, $y = u(m - n)$ — пятна одной решётки на оси Y.

Пункт 3.

8. Решётка и условие максимума. Витки лежат вплотную, поэтому период решётки вдоль струны (ось x) равен диаметру проволоки d. Луч падает под малым углом γ к оси, а нужный максимум уходит под углом θ к ней. Волна, идущая под углом γ, достигает соседнего витка на $d\cos\gamma$ позже, а от соседнего витка в направлении θ до далёкой точки

путь короче на $d\cos\theta$ (проекции направлений на ось). Условие максимума:

$$d\,(\cos\gamma - \cos\theta_m) = m\lambda.$$

9. Конус и окружность. Уравнение задаёт только угол с осью струны: лучи порядка m идут по конусу с осью-струной и углом θ_m. Стена перпендикулярна оси, поэтому пересекает его по окружности с центром там, где ось встречается со стеной, радиуса $R_m = L\tan\theta_m$ (рис. 3); над струной видна полуокружность.

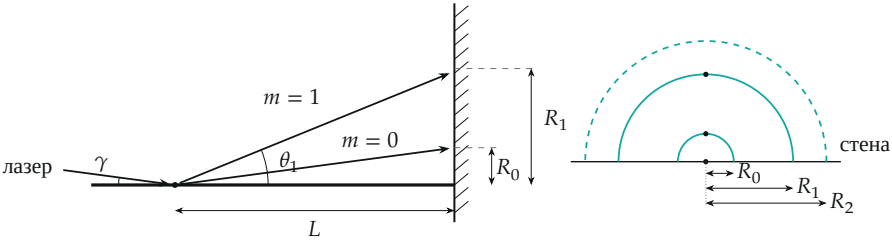


Рис. 3. Струна: слева вид сбоку (по вертикали масштаб крупнее), справа — стена с полуокружностями $m = 0$, 1 и (пунктир) $m = 2$.

10. Нулевой порядок. При $m = 0$ $\theta_0 = \gamma$ — зеркальное отражение. Порядков $m < 0$ нет ($\cos\theta$ вышел бы больше $\cos\gamma$), поэтому наименьшая окружность — нулевой порядок, следующая — первый: $\tan\gamma = R_0/L = 0{,}02$, $\tan\theta_1 = R_1/L = 0{,}0625$.

11. Диаметр проволоки. Для $m = 1$ $d = \lambda/(\cos\gamma - \cos\theta_1)$; углы малы, $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, $\theta \approx R/L$:

$$d \approx \frac{2\lambda L^2}{R_1^2 - R_0^2} = \frac{2\cdot 5{,}32\cdot 10^{-7}\cdot 4}{0{,}125^2 - 0{,}04^2}\ \text{м} \approx 3{,}0\cdot 10^{-4}\ \text{м} = 0{,}30\ \text{мм}.$$

(точно по косинусам $d = 0{,}304$ мм).

Проверка пункта 3. С этим d порядок $m = 2$ дал бы $R_2 = L\tan\theta_2 \approx 17$ см — следующую окружность, а $m = -1$ не существует: 4 и 12,5 см — действительно две первые.

Ответ. 1) 11 пятен ($|m| \le 5$); $\Delta x = L\lambda/D \approx 16$ см; 2) при $\alpha = \pi/2$: $x = nu$, $y = mu$, где $u = L\lambda/D$; при $\alpha \ne \pi/2$: $x = nu\sin\alpha$, $y = u(m - n\cos\alpha)$; m, n — целые; 3) $d \approx 0{,}3$ мм.