Гонки Мёбиуса

Задача 1. [МОШ 2022/23, 7 класс, задача 1] На рисунке, представленном ниже, изображена лента Мёбиуса. В нулевой момент времени по ленте одновременно из одной точки начинают двигаться в одном направлении вдоль линии, равноудалённой от краёв, два небольших тела с постоянными скоростями, равными v и αv, где α — безразмерный коэффициент ($\alpha > 1$). Если мысленно разрезать ленту по линии, перпендикулярной линии движения точек, то лента развернётся в полосу длиной L. Параметры v, α, L считаются известными.



1. (3 балла) В какой момент времени t_1 тела впервые встретятся?
2. (4 балла) В какой момент времени t_2 тела впервые встретятся в точке старта, если $\alpha = \dfrac{5}{3}$?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение по замкнутой дорожке: быстрое тело догоняет медленное, когда обгоняет его ровно на один круг. Вся хитрость — в длине круга. Лента Мёбиуса склеена с перекрутом, поэтому, пройдя полосу длиной L, тело попадает в ту же точку ленты, но на её *обратную* сторону. Чтобы вернуться на ту же сторону, нужно пройти ещё L. Значит, длина круга — $2L$.

Обозначения. $s_1 = vt$ и $s_2 = \alpha vt$ — пути медленного и быстрого тел от старта; $2L$ — длина замкнутой линии движения; N — номер встречи.

1. Длина круга. Развернём ленту в полосу $ABB'A'$ длиной L (рис. 1). Склейка ленты Мёбиуса соединяет край BB' с краем AA' перевёрнутым: точка B приклеена к A', точка B' — к A. Средняя линия при таком повороте переходит сама в себя, но верхняя сторона полосы приклеивается к

нижней. Тело, стартовавшее из S на лицевой стороне, через путь L оказывается в той же точке S, но с изнанки (рис. 2), и только через путь $2L$ — снова в S на лицевой стороне.

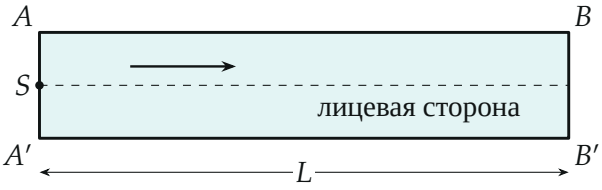

Рис. 1. Лента, разрезанная поперёк линии движения. При склейке B приклеивается к A', B' — к A (с перекрутом). Пунктир — линия движения тел.

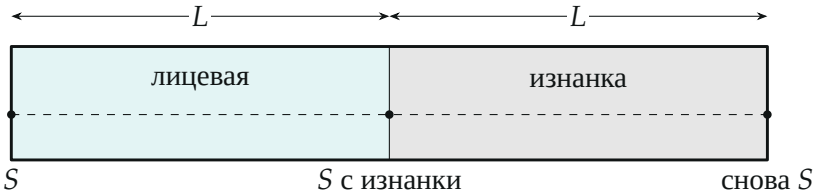

Рис. 2. Замкнутая линия движения, развёрнутая в прямую: первый проход L — по лицевой стороне, второй L — по изнанке. Длина круга $2L$.

Пункт 1.

2. Условие встречи. Тела маленькие и ползут по поверхности ленты, поэтому «встретиться» — значит оказаться в одной точке на одной стороне. Быстрое тело уходит вперёд; встреча — когда оно обгонит медленное ровно на целый круг. Первая встреча — на один круг (рис. 3):

$$s_2 - s_1 = 2L.$$

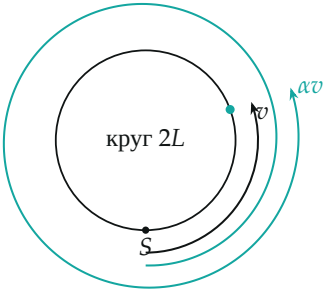

Рис. 3. Линия движения — круг длиной $2L$. Быстрое тело (бирюзовая дуга) догоняет медленное (чёрная дуга), пройдя на целый круг больше.

Подставим пути при постоянных скоростях $s = vt$:

$$\alpha v t_1 - v t_1 = 2L \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{2L}{(\alpha - 1)v}.$$

Здесь $(\alpha - 1)v$ — скорость быстрого тела относительно медленного: с ней оно «съедает» отставание в круг $2L$.

Пункт 2.

3. Моменты всех встреч. Встреча с номером N — обгон на N кругов:

$$(\alpha - 1)v t_N = 2LN \quad \Longrightarrow \quad t_N = \frac{2LN}{(\alpha - 1)v} = \frac{3LN}{v} \quad \text{при } \alpha = \frac{5}{3}.$$

4. Где происходит встреча. Медленное тело к моменту t_N прошло путь

$$s_1 = v t_N = 3LN.$$

Встреча в точке старта — когда этот путь равен целому числу кругов $2L$ (тогда и быстрое тело в S: оно прошло на N кругов больше). При $N = 1$: $s_1 = 3L = 2L + L$ — полтора круга, тела встречаются над точкой старта, но на изнанке ленты. При $N = 2$: $s_1 = 6L = 3 \cdot 2L$ — ровно три круга, это точка старта. На рис. 4 пути обоих тел построены по времени; встречи — там, где разность путей кратна $2L$.

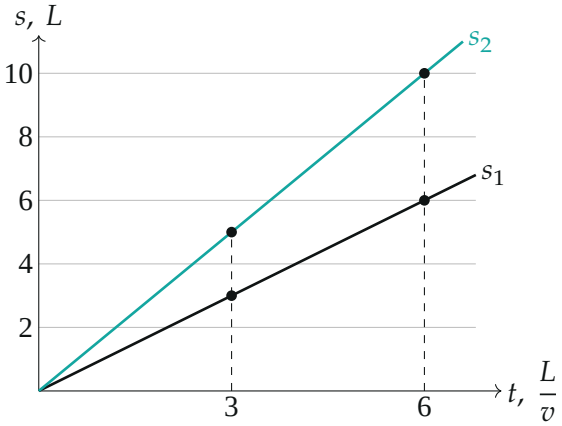

Рис. 4. Пути тел при $\alpha = 5/3$. В $t = 3L/v$ пути $3L$ и $5L$ (разность $2L$, встреча на изнанке над S), в $t = 6L/v$ — $6L$ и $10L$ (разность $4L$, оба пути кратны $2L$: встреча в точке старта).

Значит, первая встреча в точке старта — вторая встреча вообще:

$$t_2 = \frac{3L \cdot 2}{v} = \frac{6L}{v}.$$

Обратите внимание. Если считать длину круга равной L, получится $t_1 = \dfrac{L}{(\alpha - 1)v}$ — вдвое меньше. Но в этот момент тела над одной точкой ленты по разные её стороны, их разделяет толщина ленты: это не встреча.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{м}}{\text{м/с}} = \text{с}$. Предел: при $\alpha \to 1$ скорости равны, тела идут рядом и не расходятся — $t_1 \to \infty$, как и должно быть. В $t_2 = 6L/v$ быстрое тело прошло $\frac{5}{3} \cdot 6L = 10L = 5 \cdot 2L$ — пять кругов, медленное $6L$ — три круга: оба в S на лицевой стороне.

Ответ. 1) $t_1 = \dfrac{2L}{(\alpha - 1)v}$; 2) $t_2 = \dfrac{6L}{v}$.