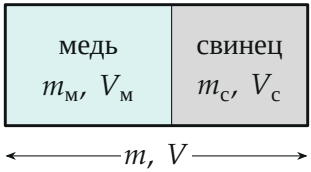
Про деталь

Задача 2. [МОШ 2022/23, 7 класс, задача 2] Согласно паспорту детали, изготовленной из сплава меди и свинца, её масса равна $m = 1000 \pm 1$ г. Измерив объём детали, рассчитали среднее значение плотности, которое оказалось равным $\rho = 10{,}0$ г/см^3. Сколько грамм меди может содержать в себе деталь, если объём был измерен с погрешностью $\Delta V = 1$ см^3? Плотности меди и свинца равны $\rho_м = 8{,}9$ г/см^3 и $\rho_с = 11{,}3$ г/см^3.



Поясняющий рисунок: мысленно соберём медь и свинец сплава в два отдельных куска. Массы и объёмы частей складываются.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача о составе сплава по средней плотности, но с погрешностями. Если бы масса и объём были известны точно, два уравнения (на массу и на объём) дали бы массу меди однозначно. Масса и объём известны лишь в пределах ± 1, поэтому масса меди получается не числом, а промежутком. Ищем его концы: какие сочетания массы и объёма из допустимых дают наибольшую и наименьшую долю меди.

Обозначения. m, V — масса и объём детали; $m_м$, $V_м$ — масса и объём меди; $m_с$, $V_с$ — свинца.

1. Измеренный объём. Средняя плотность — это масса, делённая на объём: $\rho = \dfrac{m}{V}$. По паспортной массе $m = 1000$ г и найденной плотности

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1000\text{ г}}{10{,}0\text{ г/см}^3} = 100\text{ см}^3.$$

С погрешностью измерения объём лежит в пределах $V = 100 \pm 1$ см^3, масса — $m = 1000 \pm 1$ г (рис. 1).



Рис. 1. Допустимые значения массы и объёма детали (бирюзовые отрезки).

2. Масса меди при данных m и V. Масса сплава — сумма масс частей, объём — сумма объёмов (сплав считаем просто смесью, без изменения объёма):

$$m_м + m_с = m, \qquad \frac{m_м}{\rho_м} + \frac{m_с}{\rho_с} = V.$$

Подставим $m_с = m - m_м$ во второе уравнение:

$$\frac{m_м}{\rho_м} + \frac{m - m_м}{\rho_с} = V \quad \Longrightarrow \quad m_м = \frac{V - \dfrac{m}{\rho_с}}{\dfrac{1}{\rho_м} - \dfrac{1}{\rho_с}}.$$

Знаменатель положителен: медь легче свинца, $\rho_м < \rho_с$.

3. Куда растёт масса меди. Из формулы: при росте V (та же масса) меди больше — больший объём при той же массе значит больше лёгкого металла. При росте m (тот же объём) меди меньше — больше тяжёлого. Значит,

- наибольшая масса меди — при наибольшем объёме и наименьшей массе: $V = 101$ см^3, $m = 999$ г;
- наименьшая — при наименьшем объёме и наибольшей массе: $V = 99$ см^3, $m = 1001$ г.

На рис. 2 масса меди построена как функция объёма для двух крайних масс; все возможные значения лежат в закрашенной области, её верхний и нижний углы — ответ.

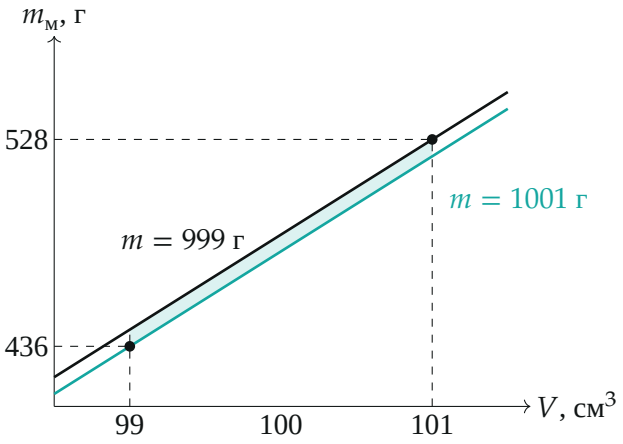


Рис. 2. Масса меди в зависимости от объёма детали: чёрная прямая — при массе 999 г, бирюзовая — при 1001 г. Закрашено всё, что допускают погрешности; точками отмечены наибольшее и наименьшее значения.

4. Наибольшая масса меди. Подставим $V = 101$ см^3, $m = 999$ г:

$$\frac{m_{\max}}{8{,}9} + \frac{999 - m_{\max}}{11{,}3} = 101 \quad \Longrightarrow \quad m_{\max} = \frac{101 - \dfrac{999}{11{,}3}}{\dfrac{1}{8{,}9} - \dfrac{1}{11{,}3}} \approx 528 \text{ г}.$$

5. Наименьшая масса меди. Подставим $V = 99$ см^3, $m = 1001$ г:

$$\frac{m_{\min}}{8{,}9} + \frac{1001 - m_{\min}}{11{,}3} = 99 \quad \Longrightarrow \quad m_{\min} = \frac{99 - \dfrac{1001}{11{,}3}}{\dfrac{1}{8{,}9} - \dfrac{1}{11{,}3}} \approx 436 \text{ г}.$$

Для сравнения, при точных $m = 1000$ г и $V = 100$ см^3 меди было бы 482 г — середина промежутка (рис. 3).



Рис. 3. Возможная масса меди: от 436 до 528 г, то есть 482 ± 46 *г.*

Обратите внимание. Погрешность массы всего 0,1 %, объёма — 1 %, а масса меди известна лишь с точностью около 10 %. Причина — плотности меди и свинца близки: в знаменателе разность $\dfrac{1}{\rho_м} - \dfrac{1}{\rho_с} \approx 0{,}024$ см^3/г, и 1 см^3 ошибки объёма даёт $1/0{,}024 \approx 42$ г ошибки в меди.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{см}^3}{\text{см}^3/\text{г}} = \text{г}$. Подстановка: при $m_{max} = 528$ г свинца 471 г, объём $\dfrac{528}{8{,}9} + \dfrac{471}{11{,}3} \approx 59{,}3 + 41{,}7 = 101{,}0$ см^3 — сходится. Остальные углы прямоугольника допусков ($m = 999$ г, $V = 99$ см^3 и $m = 1001$ г, $V = 101$ см^3) дают 444 и 520 г — внутри найденного промежутка.

Ответ. От 436 до 528 г меди ($m_м = 482 \pm 46$ г).