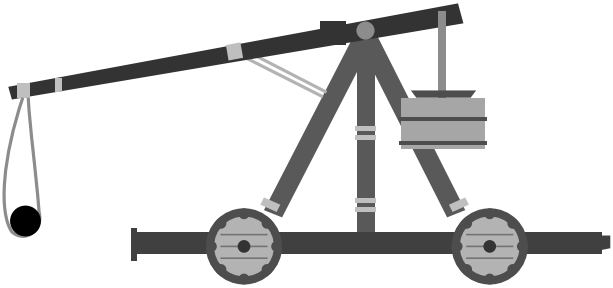
Модель требушета

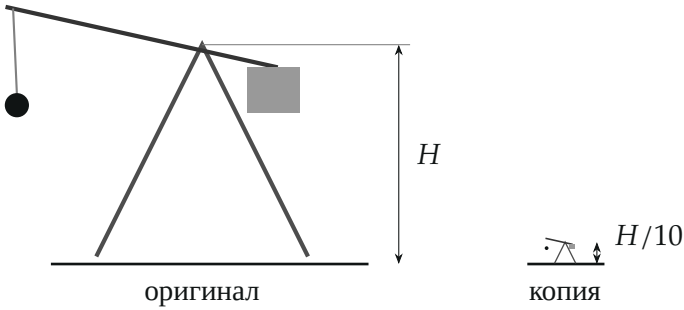
Задача 3. [МОШ 2022/23, 7 класс, задача 3] Требушет — это метательное орудие, использовавшееся в средние века для осады городов. Тяжёлый груз, закреплённый на коротком конце рычага, разгоняет пращу со снарядом, закреплённую на другом конце рычага до большой скорости, после чего снаряд отделяется от пращи и летит в цель. Ниже вы видите схематичный рисунок. Рассмотрим требушет, все детали, снаряд и противовес которого сделаны из одного материала плотностью ρ. Дальнобойность требушета (в предположении, что сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала) может зависеть от следующих размерных параметров: от линейных размеров орудия (например, от высоты H), от плотности материала ρ, из которого сделаны детали орудия, и от ускорения свободного падения g, равного 10 м/с^2.



На основе соображений размерности определите во сколько раз отличается дальнобойность требушета от дальнобойности его точной копии, все размеры которой в 10 раз меньше. Во сколько раз при таком изменении размеров изменяется максимальная (в процессе выстрела) сила натяжения верёвок, соединяющих рычаг и пращу?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на соображения размерности: формулы для дальнобойности мы не знаем (выстрел — сложное движение рычага, пращи и груза), но знаем, от чего она может зависеть. Главная идея: из H, ρ и g величину нужной размерности (длину, силу) можно составить только одним способом, а все остальные размеры точной копии входят лишь через безразмерные отношения, которые при уменьшении не меняются.

Обозначения. H — высота орудия (любой его размер), L — дальнобойность, T — наибольшая сила натяжения верёвок пращи, $k = 10$ — во сколько раз копия меньше. Квадратные скобки $[\ldots]$ — единица величины в СИ.



Точная копия: каждый размер, в том числе высота, уменьшен в $k = 10$ раз (масштаб соблюдён). Все отношения размеров — длина рычага к высоте, длина пращи к длине рычага — у копии те же.

1. Единицы данных величин. Выпишем, в чём измеряется то, от чего может зависеть ответ:

$$[H] = \text{м}, \qquad [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \qquad [g] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Остальные размеры орудия (длина рычага, пращи, размер груза) — тоже метры. Их удобно записывать как H, умноженное на безразмерное число: например, длина рычага $\ell = \alpha_1 H$. У точной копии все эти числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ те же, меняется только H.

2. Дальнобойность. Будем искать L в виде $L = C H^x \rho^y g^z$, где C — безразмерный коэффициент (он зависит только от формы орудия, то есть от чисел α_i). Приравняем единицы левой и правой частей:

$$\text{м} = \text{м}^x \cdot \frac{\text{кг}^y}{\text{м}^{3y}} \cdot \frac{\text{м}^z}{\text{с}^{2z}}.$$

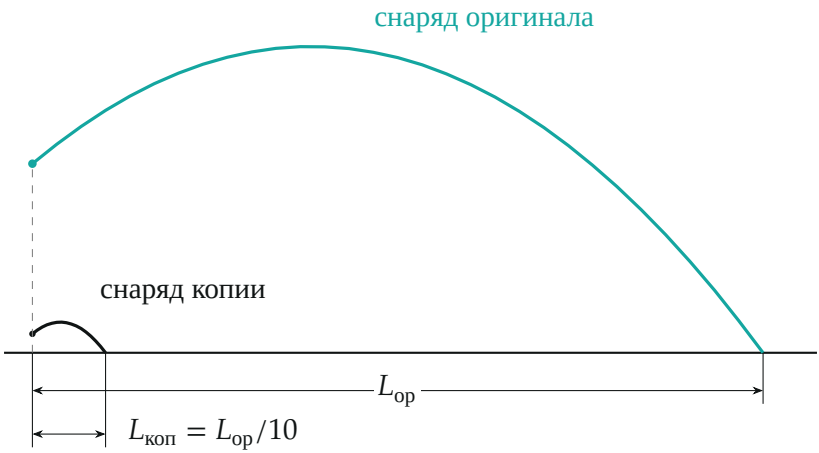
Килограмм есть только в единице ρ, а слева его нет, поэтому $y = 0$. Секунда есть только в единице g, а слева её нет, поэтому $z = 0$. Остаётся

м = м^x, то есть $x = 1$:

$$L = C\,H.$$

Обратите внимание: дальнобойность не зависит ни от g, ни от ρ — не потому, что они не влияют на выстрел, а потому, что из них нельзя составить ничего, кроме множителя с килограммами или секундами, а такой множитель в длину не входит. Коэффициент C у копии тот же (форма та же), значит,

$$\frac{L_{\text{ор}}}{L_{\text{коп}}} = \frac{CH}{C\,H/10} = 10.$$



Траектории снарядов (точки посчитаны по формулам полёта тела, брошенного под углом). Траектория копии — та же кривая, уменьшенная в 10 раз по обеим осям: и высота вылета, и дальность меньше в 10 раз.

Второй способ (проверка пункта 2). Посмотрим, во что превращаются характерные величины выстрела. Скорость имеет единицу м/с; из H и g её можно составить только так: $v = C_v\sqrt{gH}$ (подставьте: $\sqrt{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м/с}$). Снаряд, брошенный со скоростью v под углом φ, улетает по горизонтали примерно на $v^2 \sin 2\varphi/g$, а это $C_v^2 \sin 2\varphi \cdot gH/g \propto H$ — снова дальнобойность пропорциональна размеру. Угол вылета φ безразмерный, он у копии тот же.

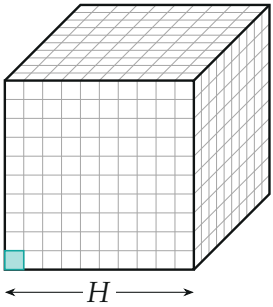
3. Сила натяжения верёвок. Ищем $T = C'H^x\rho^y g^z$. Единица силы — ньютон, $\text{Н} = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$:

$$\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \text{м}^x \cdot \frac{\text{кг}^y}{\text{м}^{3y}} \cdot \frac{\text{м}^z}{\text{с}^{2z}}.$$

Килограмм в первой степени: $y = 1$. Секунда в степени -2: $-2z = -2$, $z = 1$. Метры: $1 = x - 3y + z = x - 3 + 1$, откуда $x = 3$:

$$T = C'\rho g H^3.$$

Физический смысл понятен: ρH^3 — это масса (с точностью до числа), а $\rho H^3 g$ — вес. Так устроена *любая* сила в этой конструкции: вес противовеса, давление на ось рычага, натяжение верёвок пращи. Отличаются они только безразмерными коэффициентами, которые у точной копии те же.

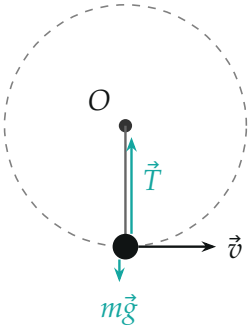


оригинал: масса $\propto \rho H^3$ копия: в 10^3 раз легче

Почему силы уменьшаются в тысячу раз: каждая деталь копии меньше в 10 раз по длине, ширине и высоте, поэтому её объём, а с ним масса и вес, меньше в $10\cdot 10\cdot 10 = 1000$ раз. Бирюзовый кубик — одна тысячная большого.

4. Во сколько раз меняется натяжение. Коэффициент C' у копии тот же, ρ и g те же, а H меньше в 10 раз:

$$\frac{T_{\text{ор}}}{T_{\text{коп}}} = \frac{C'\rho g H^3}{C'\rho g\,(H/10)^3} = 10^3 = 1000.$$



Снаряд в праще, когда натяжение наибольшее: верёвка заставляет его двигаться по дуге с центром O. Натяжение здесь в несколько раз больше веса снаряда — стрелки нарисованы в этом соотношении.

Второй способ (проверка пункта 4). Сила натяжения пращи сообщает снаряду массой m движение по дуге радиуса r, поэтому она порядка mv^2/r. Масса $m \propto \rho H^3$ уменьшается в 1000 раз, $v^2 \propto gH$ — в 10 раз, радиус $r \propto H$ — в 10 раз:

$$\frac{mv^2}{r} \;\to\; \frac{(m/1000)(v^2/10)}{r/10} = \frac{1}{1000}\cdot\frac{mv^2}{r}.$$

Ответ тот же.

Обратите внимание. Сила уменьшилась в 1000 раз, а площадь сечения верёвок копии — только в $10^2 = 100$ раз. Поэтому механическое напряжение (сила на единицу площади) в верёвках копии в 10 раз меньше: маленькая модель прочнее «по запасу», и точно повторить настоящее орудие в малом масштабе по прочности нельзя.

Проверка. Размерность: $[CH] = \text{м}$, $[\rho g H^3] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}^3 = \text{Н}$. Второй способ дал те же множители 10 и 1000 через скорость $\sqrt{gH}$.

Смысл: при одинаковой форме дальнобойность растёт пропорционально размеру орудия, а силы в конструкции — как куб размера.

Ответ. Дальнобойность оригинала в 10 раз больше, чем у копии ($L \propto H$); максимальная сила натяжения верёвок у копии в 1000 раз меньше ($T \propto \rho g H^3$).