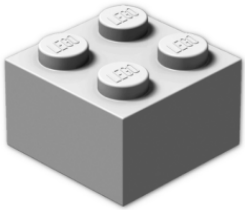
LEGO

Задача 4. [МОШ 2022/23, 7 класс, задача 4] Ребёнок хочет собрать устойчивую башню, использовав минимальное количество LEGO кирпичиков размером 2×2 (см. рисунок ниже). Детали он ставит либо строго одну на другую, чтобы все штырьки нижнего кирпичика вошли в соответствующие отверстия верхнего кирпичика, либо сдвигает из этого положения вправо или влево на расстояние, равное половине длины детали. На каждом ярусе башни содержится не более одной детали конструктора. Если линия действия результирующей силы тяжести попадает на границу основания башни, то она опрокидывается. Детали хорошо крепятся друг к другу.



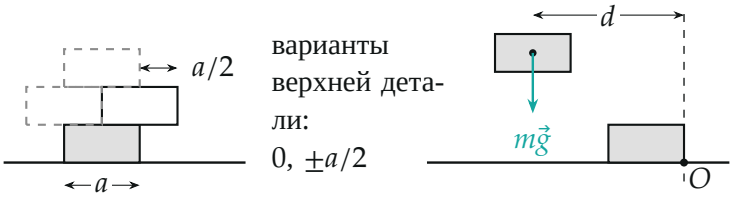
1. (3 балла) Какое количество LEGO кирпичиков использовал ребёнок, если он построил устойчивую башню, при этом оказалось, что верхняя и нижняя детали сдвинуты друг относительно друга по горизонтали на расстояние, равное удвоенной длине кирпичика?
2. (4 балла) На каком максимально возможном расстоянии друг от друга по горизонтали могут находиться верхняя и нижняя детали, если ребёнок использовал 11 кирпичиков?

В качестве ответов на вопросы приведите схематичные рисунки башен с краткими пояснениями.

▲ **Решение. Что происходит.** Башня — одно твёрдое тело (детали скреплены), которое опирается на стол только нижним кирпичиком. Она стоит, пока линия действия суммарной силы тяжести проходит строго внут-

ри основания, то есть пока момент сил тяжести относительно края основания поворачивает башню «внутрь». Главная идея: чтобы верх ушёл далеко вправо, нижние кирпичики надо сначала сдвигать влево — они работают противовесом, — и только потом лестницей вправо.

Обозначения. a — длина кирпичика, m — его масса, N — число кирпичиков. Пусть верх уходит вправо; тогда опрокинуться башня может вокруг правого края основания — точки O. Плечо d кирпичика — расстояние по горизонтали от его середины (там приложена его сила тяжести $m\vec{g}$) до вертикали через O.



Слева: следующая деталь ставится ровно над нижней или со сдвигом на $a/2$ вправо или влево (пунктир). Справа: сила тяжести детали приложена в её середине, плечо d отсчитываем от вертикали через край основания O.

1. Условие устойчивости. Правило моментов для башни относительно точки O: сила тяжести кирпичика левее вертикали через O поворачивает башню против часовой стрелки — прижимает её к столу (*удерживающий* момент mgd), правее — по часовой стрелке, наружу (*опрокидывающий* момент). Башня стоит, если

$$M_{\text{уд}} > M_{\text{опр}}.$$

Равенство — это как раз случай, когда линия действия суммарной силы тяжести проходит через край O, и по условию башня падает. Так же надо проверить и левый край основания, но у наших башен центр тяжести смещён вправо, и там запас большой.

Сдвиги кратны $a/2$, поэтому все плечи кратны $a/2$. На рисунках башен в каждой детали написано её плечо: серые детали удерживают, бирюзовые опрокидывают, белая стоит ровно над O и момента не даёт.

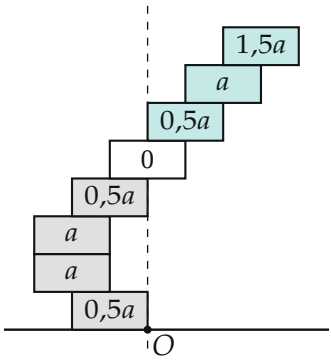
Пункт 1.

2. Сколько кирпичиков нужно хотя бы. Верх сдвинут на $2a$ вправо, то есть середина верхней детали на $2a - a/2 = 1{,}5a$ правее O. Спускаясь вниз, каждая деталь сдвигается не больше чем на $a/2$, поэтому середины пяти верхних деталей правее O хотя бы на $1{,}5a$, a, $0{,}5a$, 0, $-0{,}5a$ (последняя — уже левее). Поднимаясь от основания, деталь тоже сдвигается не больше чем на $a/2$: плечо основания $0{,}5a$ влево, следующей — не больше a влево, и так далее.

Попробуем $N = 8$. Пять верхних деталей дают опрокидывающий момент не меньше $mg(1{,}5a + a + 0{,}5a) = 3\,mga$ и удерживающий не больше $mg \cdot 0{,}5a$. Остаются три нижние детали. Самое левое, что можно поставить: основание (плечо $0{,}5a$), над ним сдвиг влево (плечо a), над ним — деталь, которая должна стоять не дальше $a/2$ от пятой сверху, то есть плечо не больше a. Итого

$$M_{\text{уд}} \leq mg\,(0{,}5a + a + a + 0{,}5a) = 3\,mga = M_{\text{опр}}.$$

Лучшее, что можно сделать из восьми деталей, — равновесие на краю (рисунок ниже), а оно по условию означает падение. Меньше восьми — тем более: каждой убранной нижней деталью мы теряем противовес.



Самая «удерживающая» башня из 8 деталей со сдвигом $2a$: $M_{уд} = (0{,}5 + 1 + 1 + 0{,}5)\,mga = 3\,mga$, $M_{опр} = (0{,}5 + 1 + 1{,}5)\,mga = 3\,mga$. Линия действия силы тяжести проходит через край O — башня падает.

3. Башня из 9 деталей. Добавим ещё одну деталь в противовес: два сдвига влево от основания, затем лестница вправо (рисунок ниже). Удер-

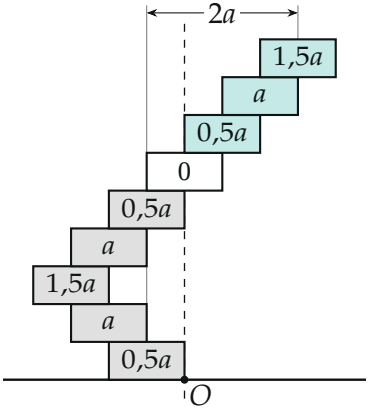
живающий момент

$$M_{уд} = 2mg \cdot \frac{a}{2} + 2mg \cdot a + mg \cdot \frac{3a}{2} = \frac{9}{2}\,mga,$$

опрокидывающий

$$M_{опр} = mg \cdot \frac{a}{2} + mg \cdot a + mg \cdot \frac{3a}{2} = 3\,mga.$$

$\frac{9}{2}\,mga > 3\,mga$ — башня устойчива. Относительно левого края основания она тем более не опрокидывается: там опрокидывать влево может только деталь с наибольшим сдвигом влево (плечо $0{,}5a$), а удерживают все остальные.



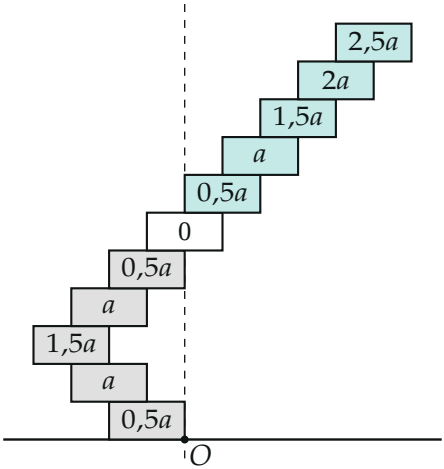
Пункт 1: башня из 9 деталей, верх сдвинут на $2a$ относительно низа. Серые детали — противовес: $M_{уд} = 4{,}5\,mga > M_{опр} = 3\,mga$.

Пункт 2.

4. Можно ли сдвиг $3a$ из 11 деталей. Рассуждаем, как в шаге 2. Середина верхней детали на $3a - a/2 = 2{,}5a$ правее O, и под ней детали не левее чем на $2a$, $1{,}5a$, a, $0{,}5a$, 0 — уже шесть верхних деталей дают $M_{опр} \geq (2{,}5 + 2 + 1{,}5 + 1 + 0{,}5)\,mga = 7{,}5\,mga$. Удерживать могут оставшиеся пять, их плечи не больше $0{,}5a$, a, $1{,}5a$, a, $0{,}5a$ (снизу растут на $a/2$ за ярус, сверху ограничены соседом справа):

$$M_{уд} \leq (0{,}5 + 1 + 1{,}5 + 1 + 0{,}5)\,mga = 4{,}5\,mga < 7{,}5\,mga.$$

Башня падает; при большем сдвиге опрокидывающий момент ещё больше. Значит, из 11 деталей сдвиг не больше $2{,}5a$.



Попытка сдвига $3a$ из 11 деталей с самым сильным противовесом: $M_{уд} = 4{,}5\,mga < M_{опр} = 7{,}5\,mga$ — башня падает.

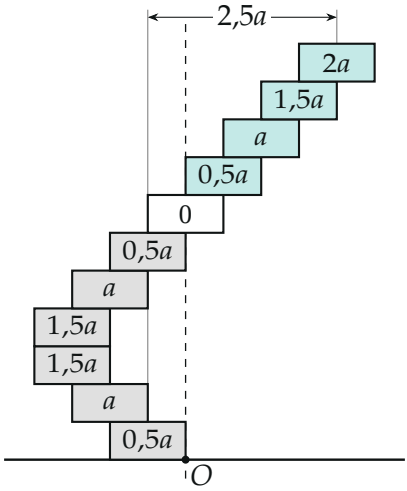
5. Сдвиг $2{,}5a$ из 11 деталей. Середина верхней детали на $2a$ правее O; пять верхних деталей дают

$$M_{\text{опр}} = mg \cdot \frac{a}{2} + mg \cdot a + mg \cdot \frac{3a}{2} + mg \cdot 2a = 5\,mga,$$

а шесть нижних (основание, два сдвига влево, деталь ровно над предыдущей, два сдвига вправо) —

$$M_{\text{уд}} = 2mg \cdot \frac{a}{2} + 2mg \cdot a + 2mg \cdot \frac{3a}{2} = 6\,mga.$$

$6\,mga > 5\,mga$ — башня устойчива. Влево она не опрокинется по той же причине, что и в шаге 3.



Пункт 2: башня из 11 деталей со сдвигом верха 2,5a: $M_{уд} = 6\,mga > M_{опр} = 5\,mga$.

Обратите внимание. Детали в середине башни тоже можно ставить ровно одну на другую (сдвиг 0): так в шаге 5 появилась лишняя деталь с плечом 1,5a в противовесе. Перебирать «только сдвиги» недостаточно.

Проверка. Второй способ — через центр тяжести. Горизонтальная координата центра тяжести одинаковых деталей — среднее координат их середин. Отсчитаем от O: у башни из 9 деталей это $\frac{(3-4{,}5)\,a}{9} = -\frac{a}{6}$ — левее края, внутри основания; у лучшей восьмидетальной — ровно 0, на краю; у башни из 11 деталей со сдвигом 2,5a — $\frac{(5-6)\,a}{11} = -\frac{a}{11}$, внутри. Тот же вывод, что и по моментам. Перебор всех башен на компьютере (у каждой детали три варианта сдвига) даёт те же числа: при $N = 8$ наибольший устойчивый сдвиг 1,5a, при $N = 9$ — 2a, при $N = 11$ — 2,5a.

Смысл: противовес внизу «покупает» сдвиг вверху, но каждая следующая ступенька вправо требует всё больше деталей противовеса.

Ответ. 1) 9 кирпичиков (два сдвига влево от основания, затем шесть ступенек вправо); 2) 2,5a, где a — длина кирпичика (два сдвига влево, деталь ровно над предыдущей, затем семь ступенек вправо).