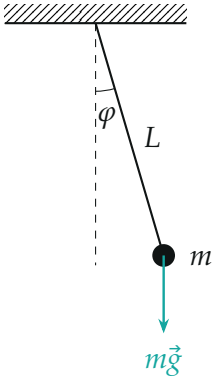
Маятник

Задача 1. [МОШ 2022/23, 8 класс, задача 1] Небольшое тело, подвешенное на твёрдом стержне в поле силы тяжести, способно совершать колебательное (повторяющееся) движение, если отклонить его из положения равновесия на небольшой угол и отпустить. *Математическим маятником* называется физическая модель, описывающая процесс колебаний груза на стержне, в которой тело считается материальной точкой, масса стержня, а также все силы трения и сопротивления движению считаются пренебрежимо малыми. Время, затрачиваемое маятником на одно колебание, иначе говоря, на возвращение в исходную точку, называется периодом.

1. (2 балла) Рассмотрим следующие размерные параметры: длина стержня маятника L, масса тела m и ускорение свободного падения g, равное 9,8 м/с^2. Исходя из соображений размерности, определите от каких параметров зависит период колебаний математического маятника. Во сколько раз изменится период колебаний маятника, если уменьшить длину подвеса в 4 раза?
2. (4 балла) Заданный интервал времени (например, минута), измеряемый маятниковыми часами, пропорционален периоду колебаний маятника. Рассмотрим маятниковые часы, в устройство которых входит маятник длиной $L = 1$ м, сделанный из стали. При такой длине движение маятника в одну сторону занимает 1,00 с. Известно, что при температуре окружающей среды $t_1 = 5\,^\circ$C часы показывают точное время. На сколько отстанут за сутки часы при температуре $t_2 = 25\,^\circ$C? Линейное тепловое расширение тел описывается формулой $L = L_0\,(1 + \alpha(t - t_0))$, где L и L_0 — размер тела при температурах t и t_0 соответственно, α — постоянный коэффициент линейного расширения, равный для стали $\alpha = 12{,}5 \cdot 10^{-6}\ 1/^\circ\text{C}$.
3. (4 балла) Как должен быть устроен подвес маятника, чтобы период колебаний не менялся при изменении температуры? Считается, что в своей конструкции вы можете соединять стержни, сделанные из двух разных материалов, коэффициенты линейного расширения которых равны α и 2α. В качестве ответа приведите схема-

тичный рисунок с краткими пояснениями.

Указание. Может оказаться полезной приближённая формула $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$, верная при $|x| \ll 1$.



Поясняющий рисунок. Математический маятник: точечное тело массы m на лёгком стержне длины L, отклонённое на малый угол φ

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пункт 1 — метод размерностей: период может зависеть только от такой комбинации L, m, g, которая измеряется в секундах. Пункт 2 — тепловое расширение: стержень удлиняется, период растёт, часы делают за сутки меньше «тиков» и отстают; изменение маленькое, поэтому работает приближённая формула. Пункт 3 — компенсация: надо собрать подвес, где удлинение одних стержней опускает груз, а удлинение других поднимает его.

Обозначения. T — период; $\Delta t = t_2 - t_1 = 20\,^\circ\text{C}$; $\tau = 86\,400$ с — сутки; T_1, T_2 — периоды при t_1 и t_2.

Пункт 1. 1. Размерность. Ищем $T = C\,L^a m^b g^c$, C — безразмерное число. Размерности: $[L] = \text{м}$, $[m] = \text{кг}$, $[g] = \text{м/с}^2$, $[T] = \text{с}$:

$$\text{с} = \text{м}^{a+c}\,\text{кг}^b\,\text{с}^{-2c} \quad \Rightarrow \quad b = 0, \quad c = -\tfrac{1}{2}, \quad a = \tfrac{1}{2}.$$

Килограмм есть только у массы, поэтому от массы период не зависит:

$$T = C\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Уменьшим длину в 4 раза — период уменьшится в $\sqrt{4} = 2$ раза.

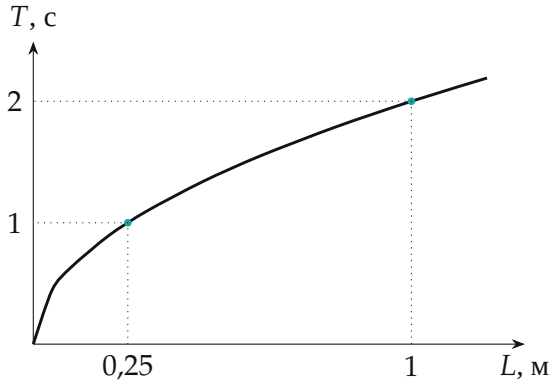


Рис. 2. Период маятника $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ (безразмерное число $C = 2\pi$ размерностями не находится, здесь взято из точной теории). Длина в 4 раза меньше — период вдвое меньше

Пункт 2. 2. Новый период. Длина при t_2: $L_2 = L_1(1 + \alpha\Delta t)$. По п. 1 $T \propto \sqrt{L}$:

$$T_2 = T_1\sqrt{1 + \alpha\Delta t} \approx T_1\left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{2}\right),$$

по формуле указания с $x = \alpha\Delta t = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \ll 1$. Период вырос на долю $\alpha\Delta t/2 = 1{,}25 \cdot 10^{-4}$.

3. Отставание. Часы отсчитывают время числом колебаний, каждое «засчитывают» за T_1. За сутки при t_2 маятник совершает $N = \tau/T_2$ колебаний, часы показывают NT_1. Отставание

$$\Delta\tau = \tau - NT_1 = \tau\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = \tau\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha\Delta t}}\right) \approx \tau\,\frac{\alpha\Delta t}{2},$$

$$\Delta\tau \approx 86\,400 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-4}\ \text{с} \approx 10{,}8\ \text{с}.$$

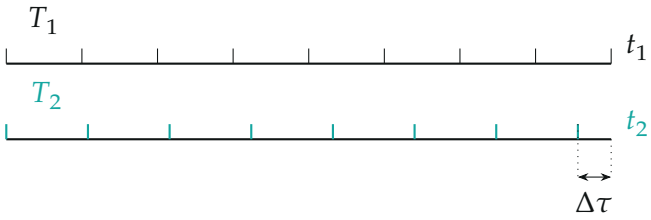


Рис. 3. «Тики» часов за одно и то же время: в тепле колебания длиннее ($T_2 > T_1$), их меньше, часы отстают (растяжение сильно преувеличено)

Пункт 3. 4. Компенсационный подвес. Возьмём три стержня одинаковой длины l: два из материала с коэффициентом α (крайние) и один с 2α (средний). Первый крайний стержень висит от точки подвеса вниз; от его нижнего конца перемычка ведёт к нижнему концу среднего стержня, который идёт *вверх*; от его верхнего конца перемычка ведёт ко второму крайнему стержню, который снова идёт *вниз*, и на нём груз (рис. 4). Расстояние от подвеса до груза

$$L = l_1 - l_2 + l_3.$$

При нагревании на Δt крайние удлиняются на $\alpha l \Delta t$ каждый и опускают груз, средний удлиняется на $2\alpha l \Delta t$ и поднимает его:

$$\Delta L = \alpha l \Delta t - 2\alpha l \Delta t + \alpha l \Delta t = 0.$$

Длина маятника $L = l$ не меняется, значит, и период.

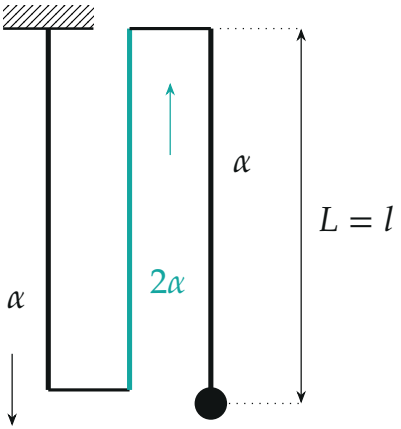


Рис. 4. Подвес из трёх стержней длиной l: крайние (коэффициент α) удлиняясь опускают груз (чёрная стрелка), средний (2α) — поднимает (бирюзовая). Перемычки короткие и не влияют

Обратите внимание. В п. 2 отставание не зависит от длины маятника и от числа C: важна только относительная прибавка периода $\alpha\Delta t/2$. Данные «$L = 1$ м» и «ход в одну сторону 1,00 с» лишние — их можно использовать лишь для проверки $T = 2{,}00$ с.

Проверка. Размерность: $\tau\alpha\Delta t$ — секунды. Знак: в тепле маятник длиннее — часы отстают, при $t_2 < t_1$ они бы спешили. Точный расчёт (без приближения): $86\,400\,(1 - 1/\sqrt{1{,}00025}) = 10{,}80$ с — совпадает.

Смысл: 20 градусов нагрева удлиняют стальной маятник на 0,25 мм, и этого хватает, чтобы часы уходили на 11 с в сутки; поэтому точные часы делают с компенсацией.

Ответ. 1) $T = C\sqrt{L/g}$, от массы не зависит; длина в 4 раза меньше — период в 2 раза меньше; 2) $\Delta\tau \approx \tau\,\dfrac{\alpha\,(t_2 - t_1)}{2} \approx 10{,}8$ с; 3) три стержня одной длины: крайние из материала с α висят вниз, средний с 2α направлен вверх и соединён с ними перемычками (рис. 4), $\Delta L = \alpha l\Delta t - 2\alpha l\Delta t + \alpha l\Delta t = 0$.