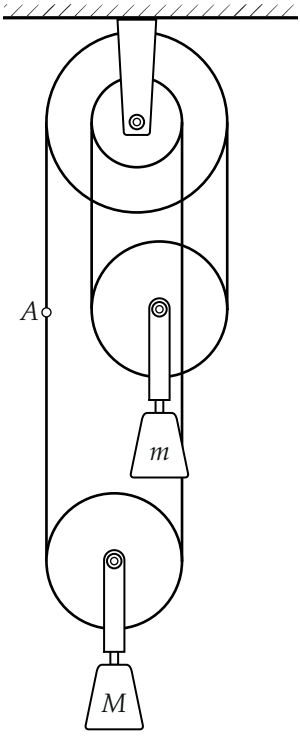
Равновесие системы блоков

Задача 2. [МОШ 2022/23, 8 класс, задача 2] Система, изображённая на рисунке, состоит из двух подвижных блоков, одного неподвижного двухступенчатого блока, двух грузов и нити. Двухступенчатый блок состоит из лёгких, жёстко соединённых дисков с общей осью, диаметры которых равны 15 см и 30 см. Массы грузов равны $m = 1$ кг и $M = 3$ кг. Массами нитей и блоков, а также трением в осях блоков можно пренебречь, нить не проскальзывает по поверхностям блоков.



1. (3 балла) Пусть в точке A к нити приложена такая сила F, что система находится в равновесии. Куда направлена и чему равна эта сила?

2. (4 балла) Можно ли привести систему в состояние равновесия, действуя с некоторой вертикальной силой на нить в точке A, если поверхность двухступенчатого блока гладкая (так что нить по ней проскальзывает)? Ответ объясните.

▲ **Решение. Что происходит.** Нить замкнута в кольцо: от точки A вверх, через верх большого диска, вниз к правой стороне блока груза m, под ним, вверх к малому диску, через его верх, вниз к правой стороне блока груза M, под ним и вверх снова к A. Подвижные блоки лёгкие — натяжения по обе стороны каждого равны, и каждый держит половину своего груза. Двухступенчатый блок поворачивается, и его равновесие — равенство моментов сил натяжения относительно оси. Сила в точке A меняет натяжение нити только на участке над A.

Обозначения. $R = 15$ см и $r = 7{,}5$ см — радиусы большого и малого дисков; T_M, T_m — натяжения ветвей у блоков M и m; ось y вверх; $g = 10$ м/с^2.

Пункт 1. 1. Подвижные блоки. Второй закон Ньютона для блока с грузом M (вместе) в проекции на ось y: две ветви вверх, вес вниз; блок лёгкий, поэтому натяжения обеих его ветвей равны (иначе невесомый блок раскрутился бы):

$$2T_M - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T_M = \frac{Mg}{2} = 15\,\text{Н}, \qquad \text{аналогично} \quad T_m = \frac{mg}{2} = 5\,\text{Н}.$$

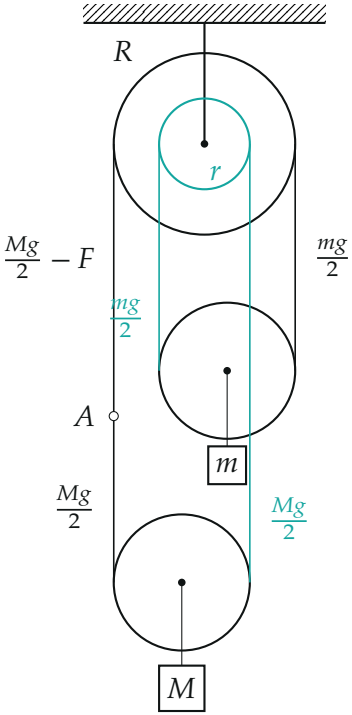


Рис. 2. Схема нити и натяжения ветвей. Чёрные ветви идут к большому диску (плечо R), бирюзовые — к малому (плечо r). Сила $\vec{F}$ приложена в точке A и направлена вверх

2. Точка A**.** Ветвь ниже A натянута с силой T_M. Отрезок нити у A невесом, сумма сил на него ноль: сверху $T_{\text{над}}$ вверх, снизу T_M вниз, плюс F. Если F направлена вверх, $T_{\text{над}} = T_M - F$.

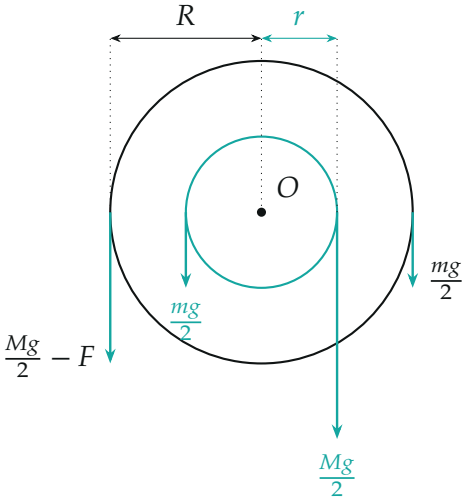


Рис. 3. Силы натяжения, действующие на двухступенчатый блок, и их плечи относительно оси O (длины стрелок — примерно по модулю при $F = 5$ Н)

3. Моменты для двухступенчатого блока. Правило моментов относительно оси O (против часовой стрелки — левые ветви, по часовой — правые; на лёгкий блок силы тяжести нет, сила оси плеча не имеет):

$$\left(\frac{Mg}{2} - F\right) R + \frac{mg}{2}\, r = \frac{mg}{2}\, R + \frac{Mg}{2}\, r.$$

Отсюда

$$F = \frac{(M-m)g\,(R-r)}{2R} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 7{,}5}{2 \cdot 15}\ \text{Н} = 5\ \text{Н}.$$

$F > 0$ — предположение о направлении верно: сила направлена вверх.

4. Второй способ — вся система. Для системы «двухступенчатый блок + нить + подвижные блоки + грузы» внутренние натяжения не входят. Моменты внешних сил относительно O: F на плече R (точка A на вертикали левого края большого диска), груз M на плече $\frac{R+r}{2} - r$ (его блок висит между $-R$ и $+r$, центр в $\frac{r-R}{2}$), груз m на плече $\frac{R-r}{2}$ с другой стороны:

$$FR + mg\,\frac{R-r}{2} = Mg\,\frac{R-r}{2} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{(M-m)g\,(R-r)}{2R} = 5\ \text{Н}.$$

Пункт 2. 5. Гладкий двухступенчатый блок. Нить скользит по дискам без трения, поэтому её натяжение по обе стороны каждого диска одинаково. Малый диск соединяет левую ветвь блока m и правую ветвь блока M:

$$T_m^{\text{лев}} = T_M^{\text{прав}}.$$

Но у лёгкого подвижного блока натяжения обеих ветвей равны, значит $T_m^{\text{лев}} = mg/2$ и $T_M^{\text{прав}} = Mg/2$, и требуется $mg/2 = Mg/2$ — при $M \neq m$ это невозможно. Сила в точке A этот участок нити не затрагивает. Равновесия нет ни при какой силе F.

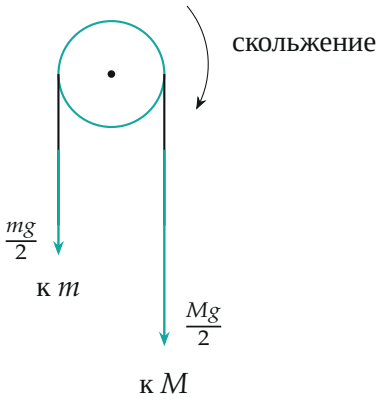


Рис. 4. Гладкий малый диск: по разные стороны нить тянут с силами $mg/2$ и $Mg/2$; без трения они не могут уравновеситься — нить поползёт в сторону груза M

Обратите внимание. В пункте 1 равновесие держится трением нити о диски: именно оно позволяет натяжениям по разные стороны диска быть разными. Если точку A зажать, при гладком блоке груз M пойдёт вниз, m — вверх, а нить заскользит по малому диску.

Проверка. Размерность F — кг·м/с^2 = Н. Пределы: $M = m$ — $F = 0$, система симметрична; $r = R$ — $F = 0$, ступенчатый блок становится обычным и уравновешен сам. Числа: моменты $(15 - 5) \cdot 15 + 5 \cdot 7{,}5 = 187{,}5$ и $5 \cdot 15 + 15 \cdot 7{,}5 = 187{,}5$ (Н·см) — равны.

Смысл: двухступенчатый блок с разными плечами позволяет удержать неравные грузы малой силой 5 Н, но только благодаря сцеплению нити с ним.

Ответ. 1) $F = \dfrac{(R-r)(M-m)g}{2R} = 5$ Н, направлена вверх; 2) нельзя: на гладком диске натяжения по обе стороны равны, а подвижные блоки требуют $mg/2$ и $Mg/2$.