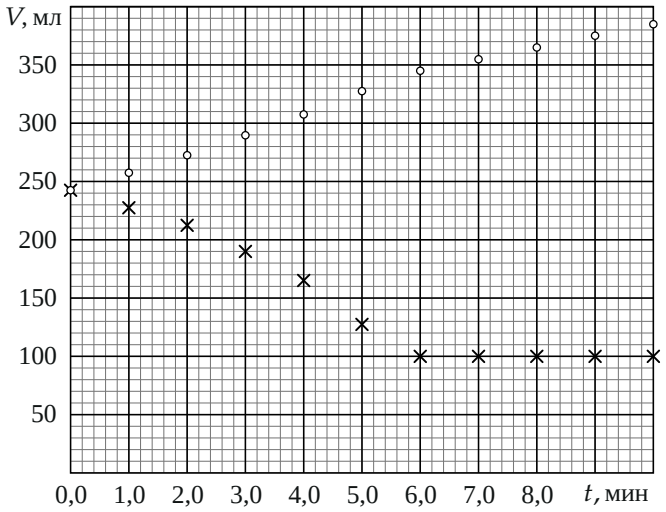
Вода и масло

Задача 3. [МОШ 2022/23, 8 класс, задача 3] Цилиндрический сосуд с нанесённой на боковую поверхность мерной шкалой частично заполнен водой, в которой плавает выпуклая пластиковая игрушка. В сосуд начинают добавлять масло, которое течёт тонкой струйкой с постоянной скоростью μ, измеряемой в мл/с.

Каждую минуту с помощью мерной шкалы определяют два значения объёма, соответствующие положению уровня поверхности воды и масла. Результаты измерений показаны на графике, представленном ниже. В процессе эксперимента жидкости не смешиваются.



Маркеры одной формы (кружки или крестики) соответствуют одной из жидкостей. Плотность воды равна 1 г/см^3, плотность масла меньше плотности воды.

1. (2 балла) Чему равна скорость μ?
2. (6 баллов) Определите плотность масла.

▲ **Решение. Что происходит.** Масло легче воды и ложится сверху. Чем толще слой масла, тем больше выталкивающая сила со стороны масла

на игрушку, и игрушка всплывает из воды: объём её части в воде уменьшается, и уровень границы «вода — масло» опускается. Когда игрушка целиком скрылась под маслом, её положение больше не меняется: граница стоит, а верхний уровень растёт только за счёт масла. Ключевой закон — условие плавания (закон Архимеда) для двух жидкостей.

Обозначения. Показания шкалы — объём сосуда ниже уровня. W — объём воды; V_1 и v_1 — объём игрушки ниже границы воды в начале и в конце; V_2 — объём игрушки в слое масла в конце; $\rho_в$, $\rho_м$ — плотности воды и масла; ось y вверх.

1. Какие маркеры чьи. Нижний уровень — граница воды, он равен W + (объём игрушки ниже его); воды не прибавляется, а игрушка всплывает — он падает. Значит, крестики (убывают) — вода, кружки (растут) — верхняя поверхность масла. В момент $t = 0$ масла нет и обе отметки совпадают: 243 мл.

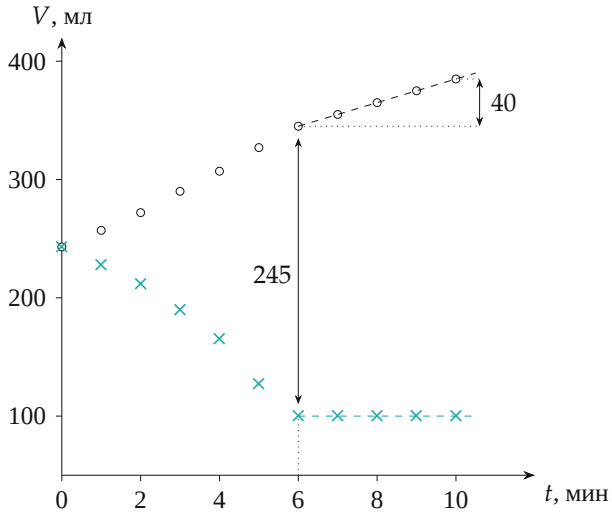


Рис. 2. Данные графика: кружки — поверхность масла, крестики (бирюзой) — граница воды. После $t = 6$ мин граница стоит, верх растёт на 40 мл за 4 мин; при $t = 6$ мин между уровнями 245 мл

Пункт 1. 2. Скорость струйки. После $t = 6$ мин граница воды не движется (100 мл), значит, игрушка больше не меняет положения, и верх-

ний уровень растёт только из-за масла: с 345 до 385 мл за 4 мин:

$$\mu = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{40\text{ мл}}{4\text{ мин}} = 10\ \frac{\text{мл}}{\text{мин}} \approx 0{,}17\ \frac{\text{мл}}{\text{с}}.$$

Пункт 2. 3. Объёмы игрушки. Граница воды: в начале $W + V_1 = 243$ мл, в конце $W + v_1 = 100$ мл, откуда

$$V_1 - v_1 = 143\text{ мл}.$$

Между уровнями при $t = 6$ мин — масло $\mu t = 60$ мл и часть игрушки в масле V_2:

$$V_2 = 345 - 100 - 60 = 185\text{ мл}.$$

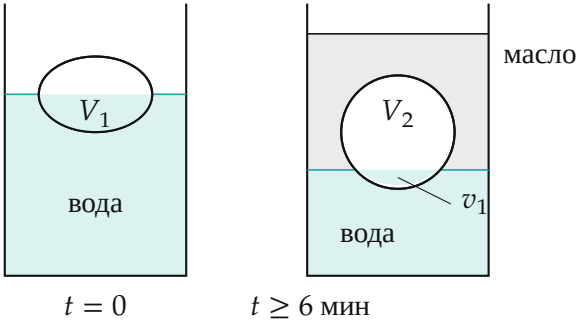


Рис. 3. Игрушка в начале (в воде объём V_1) и в конце (в воде v_1, в масле V_2). Масштаб условный

4. Условие плавания. Второй закон Ньютона для игрушки в равновесии в проекции на ось y: сила тяжести равна сумме выталкивающих сил. В начале и в конце:

$$mg = \rho_в g V_1, \qquad mg = \rho_в g v_1 + \rho_м g V_2.$$

Вычитая,

$$\rho_м = \rho_в \frac{V_1 - v_1}{V_2} = 1\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot \frac{143}{185} \approx 0{,}77\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

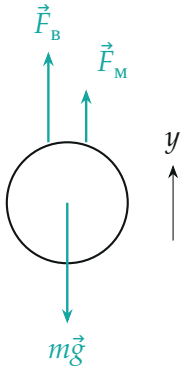


Рис. 4. Силы на игрушку в конце: тяжесть и выталкивающие силы воды $F_в = \rho_в g v_1$ и масла $F_м = \rho_м g V_2$ (в начале — одна $\rho_в g V_1$)

Обратите внимание. Ни объём воды W, ни масса игрушки, ни площадь сосуда не нужны: все объёмы читаются прямо со шкалы, а масса сокращается. Брать надо момент, когда граница уже остановилась ($t \geq 6$ мин), иначе в V_2 войдёт ещё не вытесненный объём.

Проверка. Второй момент, $t = 10$ мин: $385 - 100 - 100 = 185$ мл — то же V_2, игрушка действительно больше не движется. Размерность — отношение объёмов, плотность в г/см^3; $\rho_м < \rho_в$, как сказано в условии.

Смысл: масло поднимает игрушку, забирая на себя часть её веса; сколько воды «освободилось» (143 мл), столько массы теперь держит масло в объёме 185 мл.

Ответ. 1) $\mu = 10$ мл/мин $\approx 0{,}17$ мл/с; 2) $\rho_м = \rho_в \dfrac{V_1 - v_1}{V_2} \approx 0{,}77$ г/см^3.