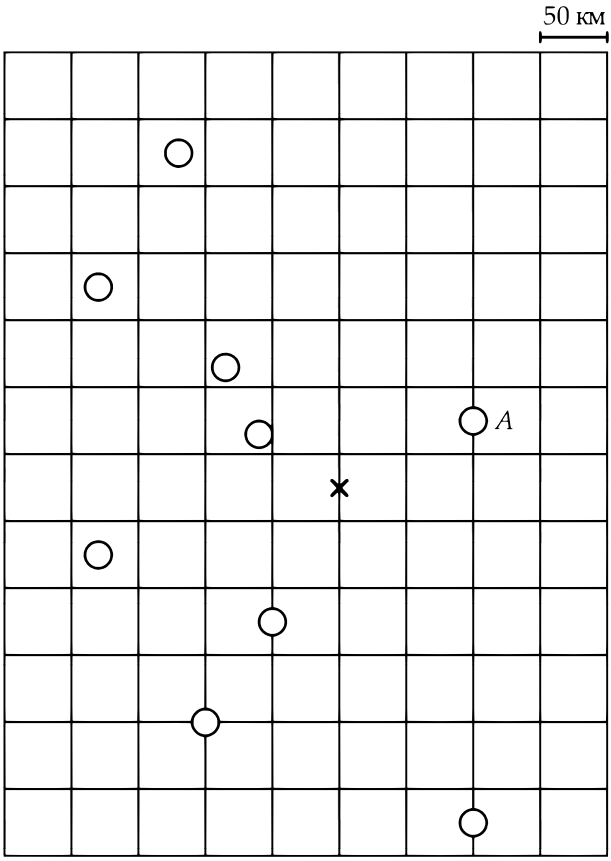
Передвижение вертолёта

Задача 4. [МОШ 2022/23, 8 класс, задача 4] Вертолёт летит с постоянной по модулю скоростью 200 км/ч. На рисунке, представленном ниже, изображено положение вертолёта (крестик) относительно населённого пункта A и остальных населённых пунктов (кружки) в 12:00. Известно, что вертолёт движется на одной высоте над Землёй по траектории, состоящей из прямолинейных участков. В таблице, приведённой ниже, указано расстояние L от пункта A до точки, где находится вертолёт в разные моменты времени.

Время	12:30	13:00	13:30	14:00
L, км	150	225	250	300

Пользуясь увеличенным рисунком, представленным на дополнительном листе, а также циркулем и линейкой, ответьте на следующие вопросы.



1. (3 балла) Пусть известно, что вертолёт не менял направление полёта с 12:00 до 12:30. В какое самое раннее время он мог пролететь над каким-либо населённым пунктом? Над каким именно населённым пунктом он бы при этом пролетел?
2. (7 баллов) Пусть известно, что вертолёт менял направление полёта только один раз в 13:00. В каком населённом пункте оказался вертолёт в 14:00?

Все построения делайте на увеличенном рисунке, представленном на дополнительном листе. Искомые города пометьте, например, «галочкой». Кратко опишите ваши рассуждения и последовательность построений.

▲ **Решение. Что происходит.** Скорость постоянна по модулю, поэтому за каждые полчаса вертолёт пролетает ровно 100 км — он оказывается на окружности радиуса 100 км вокруг своего прежнего положения. Таблица даёт вторую окружность — вокруг пункта A с радиусом L. Возможные положения — точки пересечения двух окружностей; прямолинейность участков отбирает из них нужные. Это задача на равномерное прямолинейное движение и построение циркулем.

Обозначения. Клетка карты — 50 км (масштаб в углу), так что 100 км — 2 клетки, $L = 150$; 225; 250; 300 км — 3; 4,5; 5; 6 клеток; H — положение вертолёта в 12:00; B — в 12:30, C — в 13:00, D — в 13:30, E — в 14:00. Радиус кружка населённого пункта на карте $\approx$ 10 км.

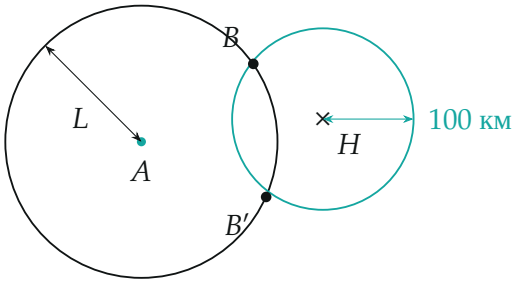


Рис. 3. Идея построения: через полчаса вертолёт на окружности радиуса 100 км вокруг H и на окружности радиуса L вокруг A — в одной из двух точек пересечения

Пункт 1. 1. Положение в 12:30. До 12:30 вертолёт летел прямо и пролетел $200 \cdot 0{,}5 = 100$ км. Проводим окружность радиуса 2 клетки с центром в H и окружность радиуса 3 клетки с центром в A. Они пересекаются в двух точках B и B' (рис. 4). На отрезках HB и HB' ни одного пункта нет: ближайший к ним проходит в $\approx$ 35 км от линии полёта, больше радиуса кружка.

2. Самый ранний пролёт. После 12:30 направление можно менять, и быстрее всего вертолёт долетит до пункта, ближайшего к B или B'. Ближайший — пункт K слева от B, в 185 км к западу и 40 км к северу от A; расстояние $BK \approx 40$ км (8 мелких клеток увеличенного листа). До

края кружка $40 - 10 = 30$ км, до дальнего края 50 км:

$$\Delta t_1 = \frac{30\text{ км}}{200\text{ км/ч}} = 0{,}15\text{ ч} = 9\text{ мин}, \qquad \Delta t_2 = \frac{50}{200}\text{ ч} = 15\text{ мин}.$$

Вертолёт будет над пунктом K с 12:39 до 12:45; самое раннее время — 12:39. От B' ближайший пункт в ≈ 95 км — позже.

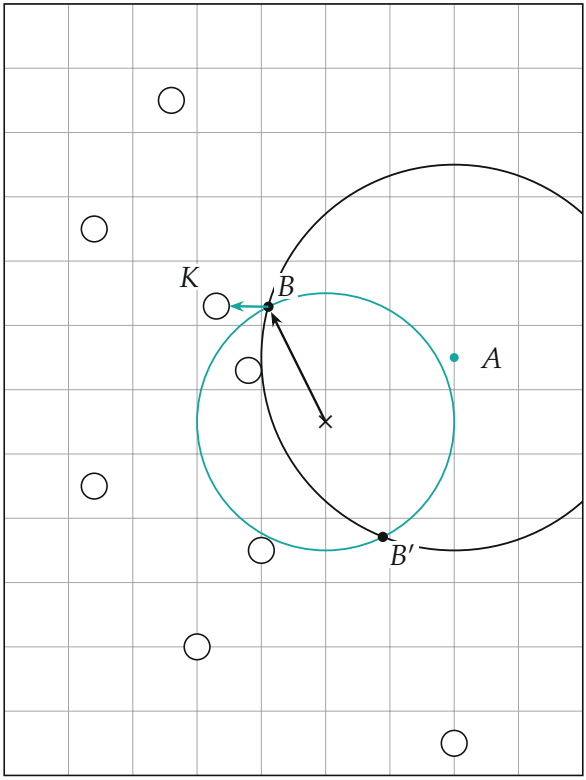


Рис. 4. Пункт 1: окружности радиусов 150 *км вокруг* A *и* 100 *км вокруг* H *дают положения* B *и* B' *в 12:30; из* B *ближе всего пункт* K *(бирюзовая стрелка,* 40 *км)*

Пункт 2. 3. Положение в 13:00. До 13:00 направление не менялось, значит, C лежит на продолжении HB (или HB') ещё на 100 км: $C = H + 2 \cdot \overrightarrow{HB}$. Проверка таблицей: построенные точки отстоят от A на ≈ 229 км — в пределах точности построения 225 км. Так что годятся обе ветви, и ответ выбирают дальнейшие данные.

4. После поворота. С 13:00 до 14:00 вертолёт летит прямо: D — пересечение окружности радиуса 100 км вокруг C с окружностью 250 км вокруг A (по две точки на каждую ветвь), E — продолжение CD ещё на 100 км. Всего четыре траектории. У всех четырёх E оказывается на расстоянии ≈ 300 км от A, как и требует таблица, но населённый пункт в точке E только у одной: ветвь через B', поворот в 13:00 на запад, и в 14:00 вертолёт над пунктом в 200 км к западу и 225 км к югу от A (точка E в ≈ 10 км от его центра, в пределах кружка). Остальные три конечные точки лежат вдали от пунктов (одна — за краем карты).

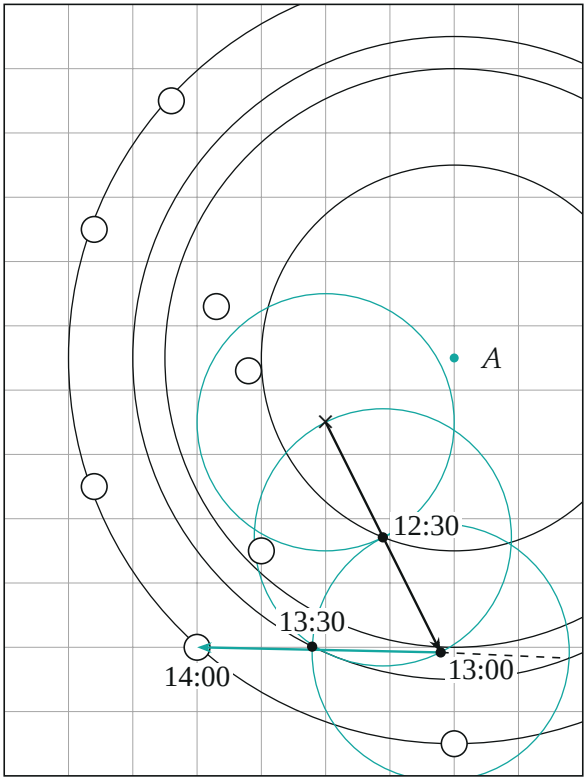


Рис. 5. Пункт 2: чёрные окружности вокруг A — радиусы 150, 225, 250, 300 *км; бирюзовые —* 100 *км вокруг положений в 12:00, 12:30, 13:00. До 13:00 полёт прямой (чёрная стрелка), после поворота — бирюзовая стрелка к пункту, где вертолёт в 14:00; пунктир — второй, отброшенный вариант D*

Обратите внимание. Окружность вокруг A сама по себе направление не задаёт: из двух пересечений выбирают по условию «прямолинейно» (точки H, B, C на одной прямой, C, D, E — тоже) и по тому, есть ли в конце пункт.

Проверка. Расчёт координатами (python, клетка $=$ 50 км, $A = (7; -5{,}5)$, $H = (5; -6{,}5)$): $B = (4{,}11; -4{,}71)$, до K 40 км; на ветви B': $C = (6{,}79; -10{,}08)$, $D = (4{,}79; -9{,}99)$, $E = (2{,}79; -9{,}89)$, $|AE| = 304$ км, до центра пункта $(3; -10)$ — 12 км. Другие три E: $(10{,}8; -10{,}3)$ — вне карты, $(1{,}0; -6{,}2)$ и $(5{,}5; 0{,}4)$ — далеко от пунктов.

Смысл: при постоянной скорости каждая строка таблицы — окружность на карте, и пересечение двух окружностей «ловит» вертолёт; прямолинейность выбирает одну точку из двух.

Ответ. 1) самое раннее — в 12:39 (над ним до 12:45), над пунктом K в 185 км к западу и 40 км к северу от A (рис. 4); 2) в пункте в 200 км к западу и 225 км к югу от A (рис. 5).