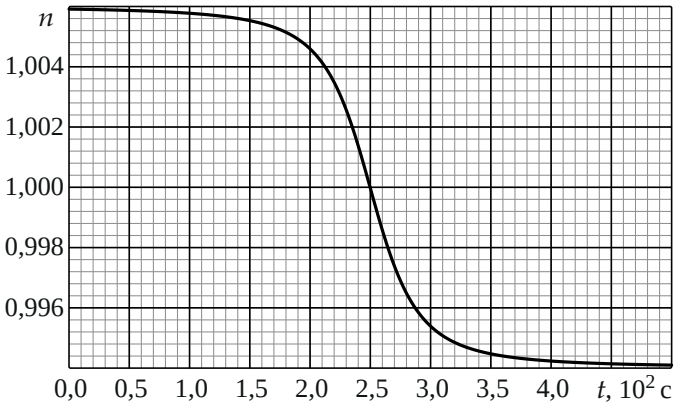
Частота ультразвука

Задача 1. [МОШ 2022/23, 9 класс, задача 1] **1a.** Источник ультразвуковых импульсов движется по прямой со скоростью v навстречу неподвижному приёмнику, располагающемуся на той же прямой. Источник излучает короткие импульсы с частотой f_0. С какой частотой f их принимает приёмник? Как изменится ответ, если источник будет удаляться от приёмника? Скорость распространения ультразвука равна c, при этом $c \gg v$.

На дне моря установлен ультразвуковой детектор. Судно движется прямолинейно с постоянной скоростью v, проходя в некоторый момент времени прямо над детектором. На судне установлен источник ультразвуковых импульсов, излучающий их с частотой f_0 с одинаковой интенсивностью в любом направлении. Детектор принимает импульсы с частотой f, отличной от частоты излучаемых импульсов. Обозначим $n = \dfrac{f}{f_0}$ отношение этих частот. На рисунке, представленном ниже, показан фрагмент зависимости отношения n от времени при движении судна. Скорость ультразвука в воде равна 1500 м/с.



1b. Чему равна скорость судна? На какой глубине располагается детектор?

Указание. При решении задачи могут оказаться полезными следующие приближённые формулы, справедливые при малых значениях x

($|x| \ll 1$)

$$\sin x \approx x, \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x.$$

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это эффект Доплера для импульсов: пока источник летит к приёмнику, каждый следующий импульс стартует ближе и приходит раньше «положенного», поэтому принимаемая частота выше излучаемой. Для судна над детектором к детектору направлена только проекция скорости на луч «судно — детектор», и эта проекция меняется от $+v$ (судно далеко впереди) через ноль (судно прямо над детектором) до $-v$. Значит, по краям графика читается скорость судна, а по крутизне в середине — глубина: чем глубже детектор, тем медленнее поворачивается луч.

Обозначения. $T_0 = 1/f_0$ — промежуток между излучениями импульсов, $T = 1/f$ — между приёмами; h — глубина; ось x вдоль курса судна, $x = 0$ — точка над детектором, t_0 — момент прохождения над ним; θ — угол между скоростью судна и направлением на детектор.

Пункт 1а. Пусть источник излучил импульс, находясь на расстоянии d от приёмника; импульс придёт через d/c. Следующий импульс излучён через T_0, когда источник приблизился на vT_0; он придёт через $T_0 + (d - vT_0)/c$ после первого излучения. Промежуток между приёмами

$$T = T_0 + \frac{d - vT_0}{c} - \frac{d}{c} = T_0\left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad f = \frac{f_0}{1 - v/c} \approx f_0\left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Приближение — по формуле указания с $x = -v/c$, поправка порядка $(v/c)^2$. При удалении источник за T_0 отходит на vT_0 дальше, в формуле меняется знак скорости:

$$f = \frac{f_0}{1 + v/c} \approx f_0\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

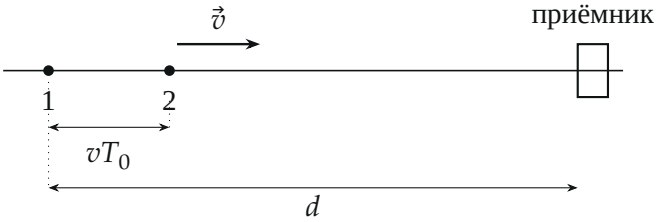


Рис. 2. Источник излучает импульс в точке 1, а следующий — через время T_0 в точке 2, на vT_0 ближе к приёмнику: второму импульсу лететь на vT_0/c меньше

Пункт 1b. 1. Частота в зависимости от угла. Импульсы излучаются часто, за время T_0 судно смещается мало, поэтому для пары соседних импульсов годится п. 1a, только вместо v стоит скорость сближения — проекция скорости на направление «судно → детектор» $v\cos\theta$ (поперечная составляющая расстояние до детектора не меняет):

$$n = \frac{f}{f_0} \approx 1 + \frac{v}{c}\cos\theta.$$

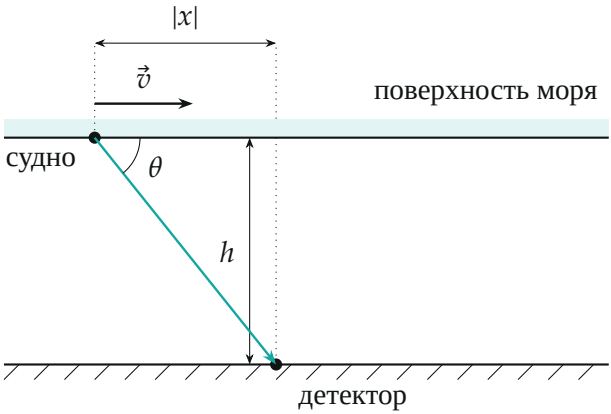


Рис. 3. Судно в точке $x < 0$ (ещё не дошло до детектора). Скорость сближения с детектором — проекция $\vec{v}$ на луч к детектору, $v\cos\theta$

Положение судна $x = v(t - t_0)$; из прямоугольного треугольника (рис. 3)

$$\cos\theta = \frac{-x}{\sqrt{x^2+h^2}} \quad \Rightarrow \quad n(t) = 1 - \frac{v}{c}\cdot\frac{v(t-t_0)}{\sqrt{v^2(t-t_0)^2+h^2}}.$$

Задержка звука $\sqrt{x^2+h^2}/c$ меняется медленно и лишь чуть сдвигает график по времени, на ответ не влияет.

2. Скорость судна. Далеко до детектора $\cos\theta \to 1$, далеко после $\cos\theta \to -1$: график выходит на уровни $n = 1 \pm v/c$. По рисунку условия эти уровни 1,0060 и 0,9940 (крайние точки фрагмента — 1,0059 и 0,9941, график ещё чуть-чуть идёт к ним):

$$\frac{v}{c} = 0{,}0060 \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}0060 \cdot 1500 \text{ м/с} = 9{,}0 \text{ м/с}.$$

3. Глубина. Вблизи t_0 угол θ близок к 90°, $|x| \ll h$, и в знаменателе $\sqrt{x^2+h^2} \approx h$:

$$n \approx 1 - \frac{v^2}{ch}(t-t_0).$$

График в середине — прямая, его наклон (по модулю) $k = v^2/(ch)$. Проводим касательную в точке $n = 1$, $t_0 = 250$ с: она пересекает уровни $1 \pm v/c$ (размах $\Delta n = 2v/c = 0{,}0120$) с интервалом по времени $\tau \approx 83$ с (от 208 до 291 с, рис. 4). Тогда

$$k = \frac{\Delta n}{\tau} = \frac{v^2}{ch} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v^2\tau}{c\,\Delta n} = \frac{(9{,}0)^2 \cdot 83}{1500 \cdot 0{,}0120} \text{ м} \approx 3{,}7 \cdot 10^2 \text{ м}.$$

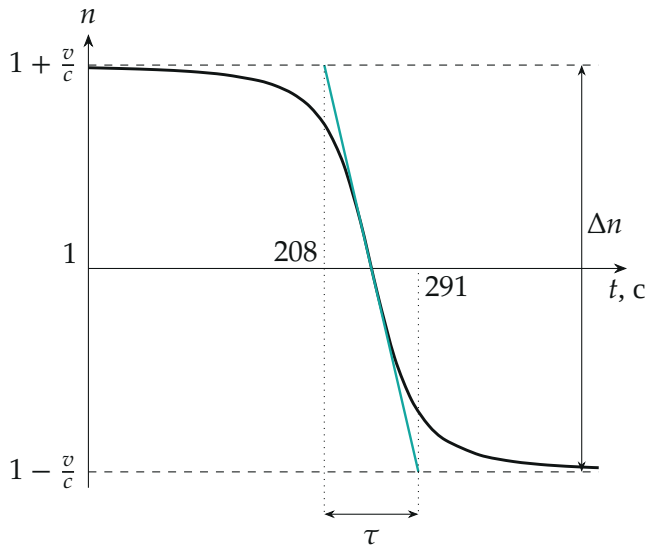


Рис. 4. Зависимость $n(t)$ по формуле п. 1 с $v/c = 0{,}0060$ и $h/v = 41{,}5$ с (вертикальный масштаб растянут). Пунктир — уровни $1 \pm v/c$, бирюзой — касательная в середине: её «высота» Δn и «ширина» τ дают наклон

Точнее можно взять любую точку графика: $n = 1{,}004$ при $t \approx 212$ с, то есть $\cos\theta = 0{,}004/0{,}006 = 0{,}67$ и $|x|/h = \cos\theta/\sin\theta = 0{,}90$; $|x| = 9{,}0 \cdot 38 \approx 3{,}4 \cdot 10^2$ м, откуда $h \approx 3{,}8 \cdot 10^2$ м. Подгонка всей кривой формулой п. 1 (python, отклонение не больше $1{,}5 \cdot 10^{-5}$) даёт $v/c = 0{,}00598$ и $h/v = 41{,}5$ с, то есть $h \approx 3{,}7 \cdot 10^2$ м.

Обратите внимание. Скорость судна определяется уровнями, к которым график только стремится; середина графика ($n = 1$) — момент, когда судно прямо над детектором и скорость сближения равна нулю.

Проверка. Размерность: $v^2\tau/(c\,\Delta n)$ — (м/с)^2·с/(м/с) = м. Знак: при сближении $n > 1$ (начало графика), при удалении $n < 1$ — как в п. 1а. Предел: если бы детектор был у самой поверхности ($h \to 0$), n скачком менялся бы с $1+v/c$ на $1-v/c$; чем глубже детектор, тем положе переход.

Смысл: края графика — скорость судна, ширина перехода — глубина: $\tau = 2h/v$, время, за которое судно проходит две глубины.

Ответ. 1а) при сближении $f = \dfrac{f_0}{1 - v/c} \approx f_0\left(1 + \dfrac{v}{c}\right)$, при удалении

$f = \dfrac{f_0}{1 + v/c} \approx f_0 \left(1 - \dfrac{v}{c}\right)$; 1b) $v = c\,(n_{\max} - 1) \approx 9{,}0$ м/с, $h = \dfrac{v^2 \tau}{c\,\Delta n} \approx (3{,}7 \pm 0{,}4) \cdot 10^2$ м.