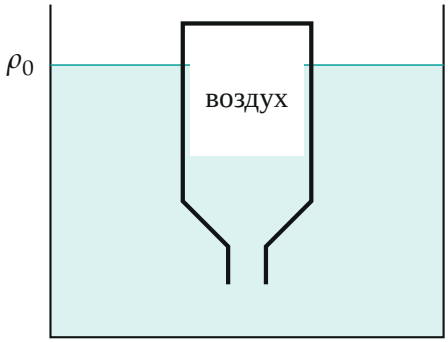
Пошла на дно

Задача 2. [МОШ 2022/23, 9 класс, задача 2] В бутылку с достаточно толстыми стенками вместимостью $V = 700$ мл наливают некоторое количество воды. Прикрыв горлышко пальцем, бутылку переворачивают вверх дном, погружают в ведро с водой и убирают руку. Бутылка плавает, сохраняя вертикальное положение. Над поверхностью воды выступает часть бутылки объёмом $\Delta V = 15$ мл. Ведро с бутылкой выносят из комнаты, температура воздуха в которой равна $t_0 = 25\,^\circ\text{C}$, на мороз. Можно считать, что в процессе охлаждения воздух, находящийся внутри бутылки, сжимается, и его объём изменяется по закону $V = V_0\,(1 + \alpha(t - t_0))$, где V_0 — объём воздуха при температуре t_0, α — коэффициент, равный $3{,}6 \cdot 10^{-3}$ 1/°C. Найдите температуру воздуха внутри бутылки в тот момент, когда бутылка полностью погрузится в воду. Масса бутылки равна 300 г, плотность материала, из которого она изготовлена, $\rho = 2600$ кг/м^3, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.



Поясняющий рисунок. Перевёрнутая бутылка плавает в ведре: вверху воздух, внизу (у горлышка) вода, над водой выступает дно бутылки

▲ **Решение. Что происходит.** Бутылка с воздухом — это поплавок: её держит сила Архимеда, равная весу воды в объёме стекла и воздуха, находящихся ниже уровня воды. Вода внутри бутылки сообщается с водой ведра, и её вес архимедовой силой не уравновешивается — она просто часть ведра. Остывая, воздух сжимается, поплавок теряет «плавучесть»,

и бутылка опускается; в момент полного погружения объём воздуха оказывается ровно таким, чтобы удерживать одно стекло. Ключевой закон — условие плавания (закон Архимеда).

Обозначения. $m = 300$ г — масса бутылки; $V_c = m/\rho$ — объём стекла; V_0 — объём воздуха в бутылке при t_0; V_1 — объём воздуха в момент полного погружения, t — температура в этот момент; ось y вверх.

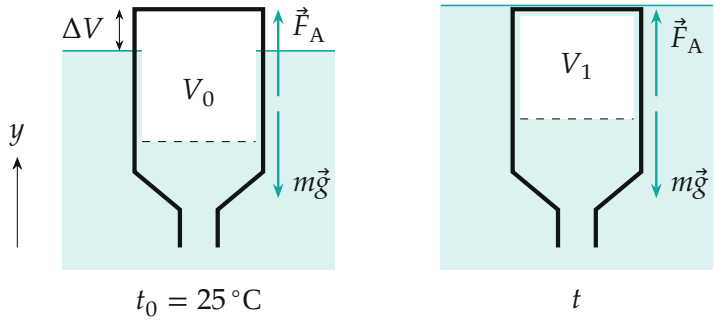


Рис. 2. Слева — в комнате: над водой выступает ΔV. Справа — на морозе, бутылка целиком под водой; воздух сжался до V_1, вода внутри поднялась (уровень — пунктир). На бутылку действуют $m\vec{g}$ и $\vec{F}_A$

1. Условие плавания в комнате. Рассматриваем тело «стекло + воздух в бутылке» (массой воздуха пренебрегаем). Второй закон Ньютона в равновесии в проекции на ось y: $F_A - mg = 0$. Под водой находится всё стекло и весь воздух, кроме выступающей части ΔV (в ней и стекло дна, и воздух):

$$\rho_0 g\,(V_c + V_0 - \Delta V) = mg \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{m}{\rho_0} - V_c + \Delta V.$$

2. Условие плавания в момент погружения. Бутылка ещё плавает, но уже вся под водой, выступающей части нет:

$$\rho_0 g\,(V_c + V_1) = mg \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{m}{\rho_0} - V_c.$$

Числа: $V_c = 300/2{,}6 = 115{,}4$ мл, $m/\rho_0 = 300$ мл, так что

$$V_0 = 300 - 115{,}4 + 15 = 199{,}6 \text{ мл}, \qquad V_1 = 184{,}6 \text{ мл},$$

воздух должен сжаться ровно на ΔV: $V_0 - V_1 = \Delta V$.

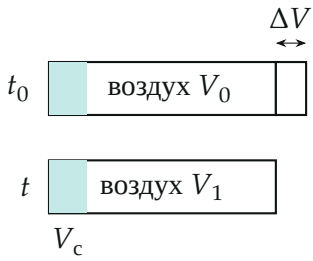


Рис. 3. Баланс объёмов под водой: стекло V_c (бирюзой) плюс воздух должны давать $m/\rho_0 = 300$ мл. В комнате часть ΔV над водой, поэтому воздуха на ΔV больше

3. Температура. По закону сжатия из условия $V_1 = V_0\,(1+\alpha(t-t_0))$:

$$t = t_0 - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{V_1}{V_0}\right) = t_0 - \frac{\Delta V}{\alpha V_0},$$

$$t = 25 - \frac{15}{3{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 199{,}6} \approx 25 - 20{,}9 \approx 4{,}1\,^\circ\text{C}.$$

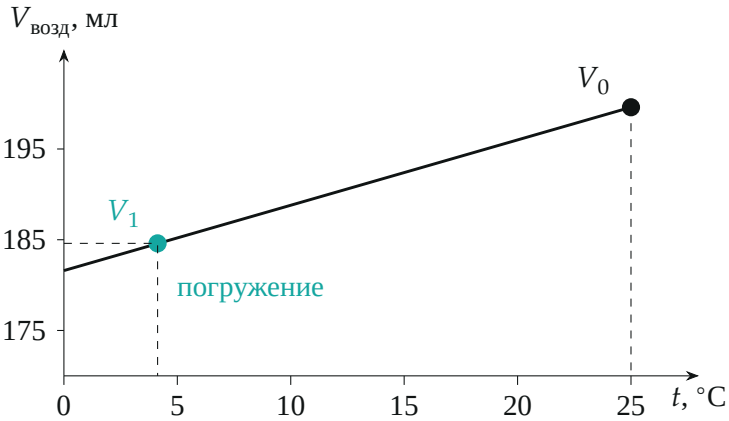


Рис. 4. Объём воздуха в бутылке при остывании (закон из условия). Бутылка тонет, когда прямая опускается до уровня $V_1 = 184{,}6$ мл — при $t \approx 4{,}1\,^\circ C$

Обратите внимание. Сколько воды налили в бутылку, не важно: вода внутри бутылки — часть воды ведра, а объём воздуха V_0 определяется условием плавания. Гидростатическое давление на глубине нескольких сантиметров меняет давление воздуха лишь на доли процента, поэтому закон сжатия из условия можно применять, не учитывая погружения.

Проверка. Размерность: $\Delta V/(\alpha V_0)$ — мл/(мл·°C^{-1}) = °C. Предел: при $\Delta V \to 0$ бутылка уже на грани погружения и $t \to t_0$. Второй способ: относительное сжатие $\Delta V/V_0 = 15/199{,}6 = 7{,}5\,\%$, при $\alpha = 0{,}36\,\%$ на градус это 20,9° — то же.

Смысл: бутылка тонет, когда воздух в ней сожмётся на объём выступавшей части; охлаждения на 21° для этого хватает. У организаторов ответ 4,2 °C — то же с точностью округления ($V_c \approx 115$ мл).

Ответ. $t = t_0 - \dfrac{\Delta V}{\alpha\,(m/\rho_0 - m/\rho + \Delta V)} \approx 4\,^\circ\text{C}$ (4,1–4,2 °C).